Método de Doolittle (Parte II)

Análisis Numérico

Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

2021-10-21

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

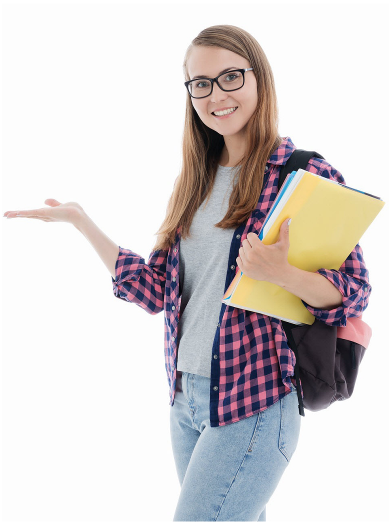
Método de Doolittle (Parte II)
Análisis Numérico
Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

Objetivo

Método de Doolittle (Parte II)

Agenda:

- Una revisión de propiedades de las matrices de permutación y triangulares inferiores.
- Ejemplo numérico del método bajo este enfoque.
- Cuándo es pertinente emplear el método.

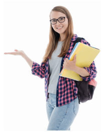


2021-10-21

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Objetivo

Objetivo
Método de Doolittle (Parte II)
Agenda:
- Una revisión de propiedades de las matrices de permutación y triangulares inferiores.
- Ejemplo numérico del método bajo este enfoque.
- Cuándo es pertinente emplear el método.



Método de Doolittle (Parte II)

Otro enfoque que emplean las computadoras

Supongamos que la *FEA* del método de Gauss simple se obtuvo ahora mediante *pivoteo parcial*, de manera que

$$(PA)\vec{x} = P\vec{b}$$

$$(LU)\vec{x} = L\vec{d}$$

siendo P una *matriz de permutación*, y a través de $U\vec{x} = \vec{d}$ puede resolverse el *SEL* mediante una *FSA*.

Método de Doolittle (Parte II)
Otro enfoque que emplean las computadoras
Supongamos que la *FEA* del método de Gauss simple se obtuvo ahora mediante *pivoteo parcial*, de manera que
$(PA)\vec{x} = P\vec{b}$
$(LU)\vec{x} = L\vec{d}$
siendo P una *matriz de permutación*, y a través de $U\vec{x} = \vec{d}$ puede resolverse el *SEL* mediante una *FSA*.

Definición

Una *matriz de permutación* es una matriz de $n \times n$ que consta solo de ceros, a excepción de un 1 en cada renglón y columna.

Ejemplo (con matrices 2×2):

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Método de Doolittle (Parte II)
Sobre las matrices de permutación
Definición
Una *matriz de permutación* es una matriz de $n \times n$ que consta solo de ceros, a excepción de un 1 en cada renglón y columna.
Ejemplo (con matrices 2×2):
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Método de Doolittle (Parte II)

Sobre las matrices de permutación

Ejemplo: (con matrices 3×3):

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Método de Doolittle (Parte II)
Sobre las matrices de permutación
Ejemplo: (con matrices 3×3):
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$

Teorema Fundamental de las matrices de permutación

Sea P la matriz de permutación de $n \times n$ formada por un conjunto particular de intercambios de renglones de la matriz identidad. Entonces, para cualquier matriz $A_{n \times n}$, PA es la matriz obtenida al aplicar exactamente la misma serie de intercambios de fila a A.

Ejemplo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad PA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

2021-10-21

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Método de Doolittle (Parte II)

Método de Doolittle (Parte II)
Sobre las matrices de permutación

Teorema Fundamental de las matrices de permutación

Sea P la matriz de permutación de $n \times n$ formada por un conjunto particular de intercambios de renglones de la matriz identidad. Entonces, para cualquier matriz $A_{n \times n}$, PA es la matriz obtenida al aplicar exactamente la misma serie de intercambios de fila a A.

Ejemplo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad PA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Método de Doolittle (Parte II)

Sobre las matrices triangulares inferiores

Hecho 1: Sea $L_{ij}(-\alpha)$ la matriz triangular inferior de ceros excepto en la diagonal principal, en la que se encuentra solo unos, y el elemento $-\alpha$ en la posición ij, donde $A \to L_{ij}(-\alpha)A$ es la operación de restar α veces el renglón j al renglón i.

Ejemplo:

$$L_{21}(-\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$L_{ij}(-\alpha)A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-\alpha a & e-\alpha b & f-\alpha c \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

2021-10-21

Método de Doolittle (Parte II)

Hecho 2: $L_{ij}(-\alpha)^{-1} = L_{ij}(\alpha)$.

Ejemplo: Si en una matriz de 3×3, se obtiene $L_{21}(-\alpha)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

se cumple que

$$L_{21}(-\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_{21}(\alpha).$$

Método de Doolittle (Parte II)
Sobre las matrices triangulares inferiores
Hecho 2: $L_{ij}(-\alpha)^{-1} = L_{ij}(\alpha)$.
Ejemplo: Si en una matriz de 3×3, se obtiene $L_{21}(-\alpha)^{-1}$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
se cumple que
$$L_{21}(-\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_{21}(\alpha).$$

Método de Doolittle (Parte II)

Sobre las matrices triangulares inferiores

Hecho 3: Se cumple que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{pmatrix}$$

no solo para matrices de 3×3, sino también para matrices de $n \times n$ con $n \geq 2$, lo que permite reunir las L_{ij} inversas en una matriz que servirá para hallar a la L de la descomposición $PA = LU$.

Método de Doolittle (Parte II)
Sobre las matrices triangulares inferiores

Hecho 3: Se cumple que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{pmatrix}$$

no solo para matrices de 3×3, sino también para matrices de $n \times n$ con $n \geq 2$, lo que permite reunir las L_{ij} inversas en una matriz que servirá para hallar a la L de la descomposición $PA = LU$.

Ejemplo (en una matriz de 3×3): Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = P_2 P_1$. Entonces,

$$L_{32}\,(1/2)\,P_2\;L_{31}\,(-1/4)\,L_{21}\,(-1/2)\,P_1\;A = U = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Y

$$A = P_1^{-1} L_{21}\,(-1/2)^{-1}\,L_{31}\,(-1/4)^{-1}\,P_2^{-1} L_{32}\,(1/2)^{-1}\,U,$$

de manera que al multiplicar por P ambos miembros de esta última ecuación, se sigue que $PA = LU$.

Método de Doolittle (Parte II)

La descomposición con pivoteo

Ejemplo (en una matriz de 3×3): Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = P_2 P_1$. Entonces,

$$L_{32}\,(1/2)\,P_2\;L_{31}\,(-1/4)\,L_{21}\,(-1/2)\,P_1\;A = U = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Y

$$A = P_1^{-1} L_{21}\,(-1/2)^{-1}\,L_{31}\,(-1/4)^{-1}\,P_2^{-1} L_{32}\,(1/2)^{-1}\,U,$$

de manera que al multiplicar por P ambos miembros de esta última ecuación, se sigue que $PA = LU$.

Método de Doolittle (Parte II)

El nuevo algoritmo en acción

Ejemplo: Emplea el método de Doolittle para resolver el *SEL*:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 5\\
4x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 0\\
x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6.
\end{aligned}
$$

Solución: Ahora se buscan la descomposición $PA = LU$ y $P\vec{b} = L\vec{d}$, de manera que se desea determinar a partir del método de Gauss simple:

1. La matriz de permutación P.
2. α_k para $k = 1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$ y, a través de $L_{ij}(\alpha_k)$, a L y U.
3. $L\vec{d} = P\vec{b}$, para $\vec{d}$; y $U\vec{x} = \vec{d}$, para $\vec{x}$.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

2021-10-21

Método de Doolittle (Parte II)

Método de Doolittle (Parte II)
El nuevo algoritmo en acción
Ejemplo: Emplea el método de Doolittle para resolver el *SEL*:
$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$
$4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0$
$x_1 + 3x_2 + x_3 = 6.$
Solución: Ahora se buscan la descomposición $PA = LU$ y $P\vec{b} = L\vec{d}$, de manera que se desea determinar a partir del método de Gauss simple:
1. La matriz de permutación P.
2. α_k para $k = 1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$ y, a través de $L_{ij}(\alpha_k)$, a L y U.
3. $L\vec{d} = P\vec{b}$, para $\vec{d}$; y $U\vec{x} = \vec{d}$, para $\vec{x}$.

A partir de la *FEA* se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 8 \end{pmatrix}.$$

Donde se observa que $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}$ y $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$ y

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Método de Doolittle (Parte II)
El nuevo algoritmo en acción
A partir de la *FEA* se tiene que:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 8 \end{pmatrix}.$$
Donde se observa que $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}$ y $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$ y
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

A través de la *FSA* se resuelve $L\vec{d} = P\vec{b}$ para $\vec{d}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que $d_1 = 0$, $d_2 = 6$ y $d_3 = 8$. Y, con otra *FSA*, se resuelve $U\vec{x} = \vec{d}$ para $\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix},$$

por lo que $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 1$.

Método de Doolittle (Parte II)
El nuevo algoritmo en acción
A través de la *FSA* se resuelve $L\vec{d} = P\vec{b}$ para $\vec{d}$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},$$
de donde se sigue que $d_1 = 0$, $d_2 = 6$ y $d_3 = 8$. Y, con otra *FSA*, se resuelve $U\vec{x} = \vec{d}$ para $\vec{x}$:
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix},$$
por lo que $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 1$.

Supongamos que debemos resolver k *SELs*:

$$
\begin{aligned}
A\vec{x} &= \vec{b}_1\\
A\vec{x} &= \vec{b}_2\\
\vdots &= \vdots\\
A\vec{x} &= \vec{b}_k.
\end{aligned}
$$

- Con el método de Gauss simple se requerirían alrededor de $\frac{2}{3}kn^3$ operaciones para la *FEA* y kn^2 para la *FSA*, considerando los k *SELs*. En total: $\frac{2}{3}kn^3 + kn^2$.

Mayra L. Díaz Sosa, 834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

2021-10-21

Método de Doolittle (Parte II)

Método de Doolittle (Parte II)
Cuándo conviene emplear el método

Supongamos que debemos resolver k *SELs*:

$A\vec{x} = \vec{b}_1$
$A\vec{x} = \vec{b}_2$
$\vdots = \vdots$
$A\vec{x} = \vec{b}_k.$

- Con el método de Gauss simple se requerirían alrededor de $\frac{2}{3}kn^3$ operaciones para la *FEA* y kn^2 para la *FSA*, considerando los k *SELs*. En total: $\frac{2}{3}kn^3 + kn^2$.

Método de Doolittle (Parte II)

Cuándo conviene emplear el método

Supongamos que debemos resolver k *SEL*s:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b}_1 \\ A\vec{x} &= \vec{b}_2 \\ \vdots &= \vdots \\ A\vec{x} &= \vec{b}_k. \end{aligned}$$

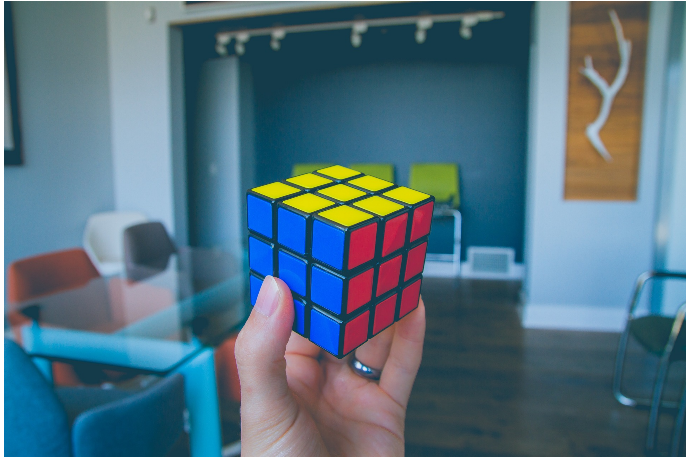
- Con el método de Doolittle se requiere aplicar la *FEA* tan solo una vez para obtener $A = LU$ y, por cada uno de los k *SEL*s, dos *FSA*s (una para $\vec{d}$ y otra para $\vec{b}$). En total: $\frac{2}{3}n^3 + 2kn^2$.
  Cuando n es grande, la diferencia es significativa.

Conclusión: Si lo que se cambia en una serie de *SEL*s a resolver son las b_i, conviene usar factorización LU.

Método de Doolittle (Parte II)
Cuándo conviene emplear el método
Supongamos que debemos resolver k *SEL*s:
$A\vec{x} = \vec{b}_1$, $A\vec{x} = \vec{b}_2$, $\vdots = \vdots$, $A\vec{x} = \vec{b}_k.$
Con el método de Doolittle se requiere aplicar la *FEA* tan solo una vez para obtener $A = LU$ y, por cada uno de los k *SEL*s, dos *FSA*s (una para $\vec{d}$ y otra para $\vec{b}$). En total: $\frac{2}{3}n^3 + 2kn^2$.
Cuando n es grande, la diferencia es significativa.
Conclusión: Si lo que se cambia en una serie de *SEL*s a resolver son las b_i, conviene usar factorización LU.

Método de Doolittle (Parte II)

En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!



Método de Doolittle (Parte II)
En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!