

ANÁLISIS NUMÉRICO
ESTUDIO DE CASO: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Objetivo: Que el alumno aplique los métodos numéricos abordados en clase para resolver un problema práctico **con el apoyo del CAS Maxima.**

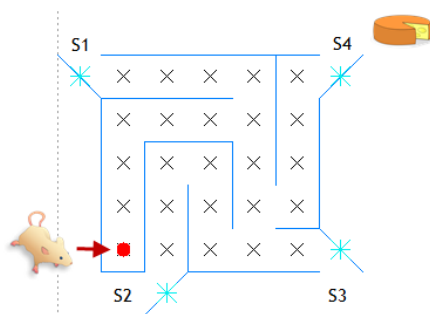
Descripción: Esta actividad es en equipo.

Un laberinto se emplea en un experimento de laboratorio para un estudio psicológico sobre el aprendizaje basado en recompensas. Las celdas que lo constituyen y su relación se aprecian en la Figura 1. a.

El experimento comienza colocando a un ratón en una de las celdas. El ratoncito debe recorrer el laberinto hasta llegar a una de sus salidas y, aunque puede regresar varias veces a una misma celda, una vez que sale del laberinto ya no le es permitido regresar (cuando sale del laberinto se acaba el experimento). Si llega a la salida S_4 , se le premia con un quesito (éxito); en cambio, si llega a cualquier otra salida no se le castiga, pero tampoco se le premia (fracaso). El experimento se repite varias veces con distintos ratones.

El propósito del experimento es determinar estadísticamente si los ratones están aprendiendo el camino en el que se les premia al comparar la tasa de éxito contra las probabilidades estándar basadas en decisiones aleatorias.

Si se asume que la elección del camino de cada ratón es aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que un ratón llegue *alguna vez* a la salida S_4 si inicia el recorrido del laberinto en la i -ésima celda ($i = 1, \dots, 25$) conforme a la numeración de la Figura 1.b?



11	10	9	8	25
4	5	6	7	24
3	19	18	12	23
2	20	17	13	22
1	21	16	14	15

a) Diseño del laberinto y sus distintas salidas¹.

b) Numeración propuesta para las celdas.

Fig.1 Diagrama del laberinto.

I. Plantea un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL) en el que las variables sean las probabilidades de llegar a la salida S_4 (éxito) partiendo de la i -ésima celda, p_{i,S_4} , para toda i . Obtendrás un SEL de 25 ecuaciones con 25 incógnitas.

¹ Se marca con un círculo uno de los posibles inicios del recorrido, en la celda 1.

Tip:

$$\begin{aligned} p_{1,s_4} &= p_{2,s_4} \\ p_{2,s_4} &= \frac{1}{2} p_{1,s_4} + \frac{1}{2} p_{3,s_4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde $p_{s_1,s_4} = p_{s_2,s_4} = p_{s_3,s_4} = 0$ y $p_{s_4,s_4} = 1$.

II. Con el CAS Maxima:

1. Calcula el número de operaciones necesarias para aplicar el método de Gauss simple para resolver el SEL.
2. Obtén el número de condición de la matriz.
3. Aplica el método de Gauss-Seidel considerando una tolerancia $T = 1 \times 10^{-8}$ y un número máximo de iteraciones $N = 1000$.
4. Aplica el método de Doolittle.

III. Elabora un Maxidocumento en el que se de respuesta, en orden y mediante comandos/código, a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el SEL que se empleó para plantear el problema?
2. ¿Es conveniente emplear el método de Gauss simple? ¿Por qué?
3. ¿Converge el método de Gauss-Seidel al aplicarlo para resolver el problema? Si es así, ¿cuáles son las soluciones arrojadas por este método y cuántas iteraciones requirió para hallar las aproximaciones?
4. ¿La matriz A de coeficientes del SEL es diagonalmente dominante? ¿La convergencia del método de Gauss-Seidel está garantizada?
5. ¿Cuáles son las soluciones arrojadas por el método de Doolittle?
6. ¿Cuáles son las matrices L y U en que puede descomponerse la matriz A de coeficientes del SEL?
7. ¿Cuál es el vector d que se obtiene al aplicar el método de Doolittle?
8. ¿Puede aplicarse el método de Cholesky para resolver este problema? Explica por qué.
9. ¿Coinciden las aproximaciones arrojadas por los distintos métodos? ¿Son congruentes con el diagrama del laberinto?
10. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de los métodos numéricos empleados?

Observa que el problema puede resolverse de manera analítica mediante procesos estocásticos, usando cadenas de Markov. También puede emplearse la simulación para hallar las soluciones. ¿Cuáles serían algunas desventajas de emplear estas dos opciones de resolución? (opcional).

No olvides agregar al Maxidocumento el número de tu equipo y los nombres de sus integrantes.

IV. Sube el archivo wxmx a la plataforma (sólo es necesaria una entrega por equipo).