Método de Lagrange

Análisis Numérico

Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

2021-11-02

Interpolación polinomial

Método de Lagrange
Análisis Numérico
Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

Agenda:

- Características del algoritmo.
- Ejemplo numérico.
- Teorema de la existencia y unicidad del polinomio interpolador.

2021-11-02

Interpolación polinomial

Objetivo

Objetivo
Método de Lagrange
Agenda:
- Características del algoritmo.
- Ejemplo numérico.
- Teorema de la existencia y unicidad del polinomio interpolador.

Sea $f \in C[x_0, x_n]$ una función de la cual solo se conocen $n+1$ puntos (x_i, y_i), con $0 \leq i \leq n$.
El polinomio de grado n que pasa por los $n+1$ puntos y aproxima a f en $[x_0, x_n]$ puede expresarse como la suma de $n+1$ polinomios de grado n.

2021-11-02

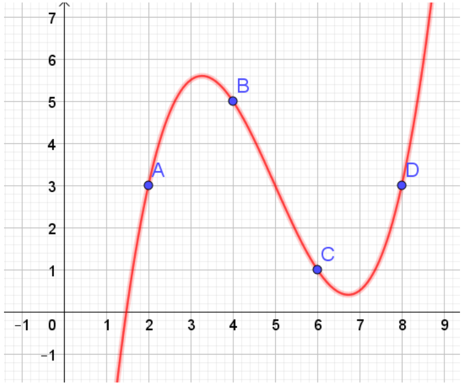
Interpolación polinomial

Método de Lagrange

Método de Lagrange
Características del algoritmo
Sea $f \in C[x_0, x_n]$ una función de la cual solo se conocen $n+1$ puntos (x_i, y_i), con $0 \leq i \leq n$.
El polinomio de grado n que pasa por los $n+1$ puntos y aproxima a f en $[x_0, x_n]$ puede expresarse como la suma de $n+1$ polinomios de grado n.

Definición

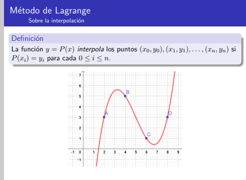
La función $y = P(x)$ *interpola* los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ si $P(x_i) = y_i$ para cada $0 \leq i \leq n$.



2021-11-02

Interpolación polinomial

Método de Lagrange



Se debe tener claro que:

1. P debe ser una función, de manera que las x_i deben ser distintas entre sí.
2. Sin importar el número de puntos siempre existe un polinomio que pasa por ellos.
3. Interpolar es lo inverso de evaluar

$$\begin{aligned} &\text{Evaluar:} \qquad P(x_i) \to (x_i, y_i). \\ &\text{Interpolar: } (x_i, y_i) \to P(x). \end{aligned}$$

4. Los polinomios son fácilmente implementados por las computadoras.

Método de Lagrange
Puntos a considerar

Se debe tener claro que:

1. P debe ser una función, de manera que las x_i deben ser distintas entre sí.
2. Sin importar el número de puntos siempre existe un polinomio que pasa por ellos.
3. Interpolar es lo inverso de evaluar

Evaluar: $P(x_i) \to (x_i, y_i)$.
Interpolar: $(x_i, y_i) \to P(x)$.

4. Los polinomios son fácilmente implementados por las computadoras.

Sea $f \in C[x_0, x_n]$ una función de la cual sólo se conocen $n+1$ puntos: $(x_i, y_i) \quad 0 \leq i \leq n$. Supongamos que existe un polinomio de grado n que pasa por los $n+1$ puntos cuya forma es:

$$P(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} x + b_n.$$

Este polinomio puede expresarse como la suma de $n+1$ polinomios:

$$\begin{aligned} P(x) =& a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ &+ a_1(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ &+ a_2(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \\ &\vdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Método de Lagrange

Cómo se construye el polinomio interpolador de Lagrange

Sea $f \in C[x_0, x_n]$ una función de la cual sólo se conocen $n+1$ puntos: $(x_i, y_i) \quad 0 \leq i \leq n$. Supongamos que existe un polinomio de grado n que pasa por los $n+1$ puntos cuya forma es:

$$P(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} x + b_n.$$

Este polinomio puede expresarse como la suma de $n+1$ polinomios:

$$\begin{aligned} P(x) =& a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ &+ a_1(x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ &+ a_2(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \\ &\vdots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Si $x = x_0$ entonces

$$P(x_0) = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n) = y_0.$$

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}.$$

De manera análoga se sigue que

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})}.$$

Método de Lagrange
Cómo se construye el polinomio interpolador de Lagrange

Si $x = x_0$ entonces

$$P(x_0) = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n) = y_0.$$

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}.$$

De manera análoga se sigue que

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})}.$$

Al sustituir todas las a_i en (1), tenemos que el polinomio de Lagrange de grado n para los datos $\{(x_i, y_i) : 0 \leq i \leq n\}$ es

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} y_i \right].$$

Método de Lagrange
Cómo se construye el polinomio interpolador de Lagrange

Al sustituir todas las a_i en (1), tenemos que el polinomio de Lagrange de grado n para los datos $\{(x_i, y_i) : 0 \leq i \leq n\}$ es

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} y_i \right].$$

Ejemplo:

- Encuentra el polinomio de Lagrange de grado 2 que pasa por $\{(0,1),(2,2),(3,4)\}$.
- Obtén $P_2(2.5)$.

Solución: En este caso

$$
\begin{aligned}
P_2(x) =& \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \\
=& \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.
\end{aligned}
$$

Y

$$P_2(2.5) = \frac{25}{8} - \frac{10}{8} + \frac{8}{8} = \frac{23}{8}.$$

Método de Lagrange
El algoritmo en acción
Ejemplo:
- Encuentra el polinomio de Lagrange de grado 2 que pasa por $\{(0,1),(2,2),(3,4)\}$.
- Obtén $P_2(2.5)$.
Solución: En este caso
$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.$$
Y
$$P_2(2.5) = \frac{25}{8} - \frac{10}{8} + \frac{8}{8} = \frac{23}{8}.$$

Teorema

Sean $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, $n+1$ parejas de puntos con distintas x_i. Entonces existe un y solo un polinomio P de grado n *o menor* que satisface $P(x_i) = y_i$ para $i = 0, \ldots, n$.

Demostración: La existencia ha quedado probada durante la construcción del polinomio interpolador de Lagrange. Supongamos que existen dos polinomios de grado n, $P(x)$ y $Q(x)$, que interpolan los $n+1$ puntos:

$$
\begin{aligned}
P(x_0) &= y_0 = Q(x_0) \\
P(x_1) &= y_1 = Q(x_1) \\
P(x_2) &= y_2 = Q(x_2) \\
&\vdots \quad \vdots \\
P(x_n) &= y_n = Q(x_n).
\end{aligned}
$$

2021-11-02

Interpolación polinomial

Método de Lagrange

Método de Lagrange
Un resultado importante
Teorema
Sean $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, $n+1$ parejas de puntos con distintas x_i. Entonces existe un y solo un polinomio P de grado n *o menor* que satisface $P(x_i) = y_i$ para $i = 0, \ldots, n$.
Demostración: La existencia ha quedado probada durante la construcción del polinomio interpolador de Lagrange. Supongamos que existen dos polinomios de grado n, $P(x)$ y $Q(x)$, que interpolan los $n+1$ puntos:
$P(x_0) = y_0 = Q(x_0)$
$P(x_1) = y_1 = Q(x_1)$
$P(x_2) = y_2 = Q(x_2)$
$P(x_n) = y_n = Q(x_n)$.

Si se define el polinomio $H(x) = P(x) - Q(x)$, es claro que éste también es de grado n y que tiene $n+1$ ceros:

$$H(x_0) = H(x_1) = H(x_2) = \cdots = H(x_n) = 0.$$

De acuerdo con el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado k tiene *a lo más* k ceros distintos a menos de que se trate del polinomio idénticamente igual a cero. De manera que $H(x)$ es dicho polinomio, lo que implica que existe un único polinomio de grado *a lo más* n que interpola los $n+1$ puntos.

$\square$.

Método de Lagrange
Un resultado importante (Continuación)

Si se define el polinomio $H(x) = P(x) - Q(x)$, es claro que éste también es de grado n y que tiene $n+1$ ceros:

$$H(x_0) = H(x_1) = H(x_2) = \cdots = H(x_n) = 0.$$

De acuerdo con el teorema fundamental del álgebra, un polinomio de grado k tiene *a lo más* k ceros distintos a menos de que se trate del polinomio idénticamente igual a cero. De manera que $H(x)$ es dicho polinomio, lo que implica que existe un único polinomio de grado *a lo más* n que interpola los $n+1$ puntos.

$\square$.

Ejemplo: Encuentra un polinomio de grado 3 o menor que interpole $\{(0,0),(1,1),(2,2),(-1,-1)\}$.
Solución:

$$\begin{aligned}P(x) =&\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1\\&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3\\=&x.\end{aligned}$$

Por el teorema anterior, no hay polinomios de grado 2 ó 3 que pasen por los cuatro puntos.

Método de Lagrange
O sea. . .
Ejemplo: Encuentra un polinomio de grado 3 o menor que interpole $\{(0,0),(1,1),(2,2),(-1,-1)\}$.
Solución:
Por el teorema anterior, no hay polinomios de grado 2 ó 3 que pasen por los cuatro puntos.

Método de Lagrange

En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!

2021-11-02

Interpolación polinomial

Método de Lagrange

Método de Lagrange
En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!