Método de Newton

Análisis Numérico

Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

2021-11-02

Interpolación polinomial

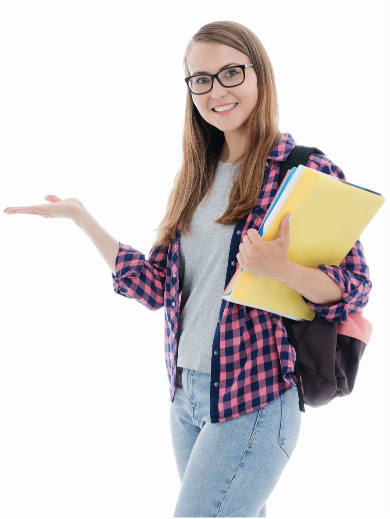
Método de Newton
Análisis Numérico
Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

Objetivo

Método de Newton

Agenda:

- Características del algoritmo.
- Ejemplo numérico.
- Ventajas del método.

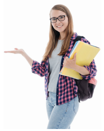


2021-11-02

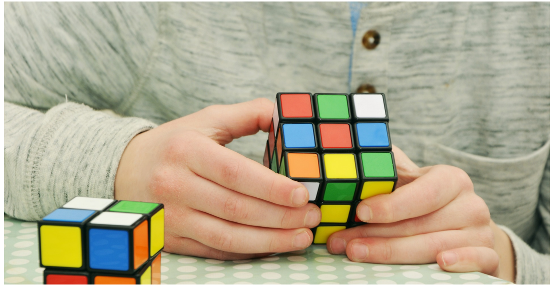
Interpolación polinomial

Objetivo

Objetivo
Método de Newton
Agenda:
- Características del algoritmo.
- Ejemplo numérico.
- Ventajas del método.



Sea $f \in C[x_0, x_n]$ una función de la cual solo se conocen $n+1$ puntos (x_i, y_i), con $0 \leq i \leq n$.
El polinomio de grado n que pasa por los $n+1$ puntos y aproxima a f en $[x_0, x_n]$ puede expresarse como la suma de polinomios de grado n *e inferior*.



Método de Newton
Características del algoritmo
Sea $f \in C[x_0, x_n]$ una función de la cual solo se conocen $n+1$ puntos (x_i, y_i), con $0 \leq i \leq n$.
El polinomio de grado n que pasa por los $n+1$ puntos y aproxima a f en $[x_0, x_n]$ puede expresarse como la suma de polinomios de grado n *e inferior*.

Definición

Sea $f[x_0, \ldots, x_n]$ el *coeficiente* del término x^n en el polinomio único que interpola $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$.

Ejemplo: En el polinomio

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

que interpola $\{(0,1),(2,2),(3,4)\}$, $f[0,2,3] = \frac{1}{2}$ denota al coeficiente de el término x^2.

Método de Newton
Una nueva notación
Definición
Sea $f[x_0, \ldots, x_n]$ el *coeficiente* del término x^n en el polinomio único que interpola $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$.
Ejemplo: En el polinomio
$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$
que interpola $\{(0,1),(2,2),(3,4)\}$, $f[0,2,3] = \frac{1}{2}$ denota al coeficiente de el término x^2.

Método de Newton

Una nueva notación

A través de las diferencias divididas

$$
\begin{aligned}
f[x_i] &= f(x_i)\\
f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}\\
f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}\\
&\vdots\\
f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_n] - f[x_i, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_i}
\end{aligned}
$$

se obtiene el polinomio interpolador de Newton:

$$P(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \dots, x_i](x - x_0)\cdots(x - x_{i-1}).$$

Método de Newton
Una nueva notación
A través de las diferencias divididas
se obtiene el polinomio interpolador de Newton:

Ejemplo: Encuentra el polinomio de Newton de grado 2 que interpola $\{(0,1),(2,2),(3,4)\}$.

Solución:

i	x_i	y_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0	1	1		
				$\frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$	
1	2	2	2		$\frac{2-1/2}{3-0} = \frac{1}{2}$
				$\frac{4-2}{3-2} = 2$	
2	3	4	4		

Y

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

2021-11-02

Interpolación polinomial

Método de Newton

Al sustituir con los correspondientes valores de la tabla se obtiene:

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(x - 0) + \frac{1}{2}(x - 0)(x - 2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x^2 - 2x) \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.
\end{aligned}
$$

¡El mismo polinomio que se obtuvo con el método de Lagrange para este ejemplo!

2021-11-02

Interpolación polinomial

Método de Newton

Método de Newton
El algoritmo en acción
Al sustituir con los correspondientes valores de la tabla se obtiene:
¡El mismo polinomio que se obtuvo con el método de Lagrange para este ejemplo!

Método de Newton

La ventaja de su uso

Una vez construido un determinado polinomio de Newton podemos agregar más puntos con toda facilidad (cosa que el método de Lagrange no ofrece).
Ejemplo: Encuentra el polinomio de Newton de grado 3 que interpola $\{(0,1),(2,2),(3,4),(1,0)\}$. Solución:

i	x_i	y_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	0	1	1			
				$\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$		
1	2	2	2		$\frac{2-1/2}{3-0}=\frac{1}{2}$	
				$\frac{4-2}{3-2}=2$		$\frac{0-1/2}{1-0}=-\frac{1}{2}$
2	3	4	4		0	
				$\frac{0-4}{1-3}=2$		
3	1	0	0			

Interpolación polinomial

2021-11-02

Método de Newton

Entonces, el polinomio de Newton de grado 3 que interpola dichos puntos queda como sigue:

$$
\begin{aligned}
P_3(x) =& f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
=& P_2(x) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 0)(x - 2)(x - 3) \\
=& -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{7}{2}x + 1.
\end{aligned}
$$

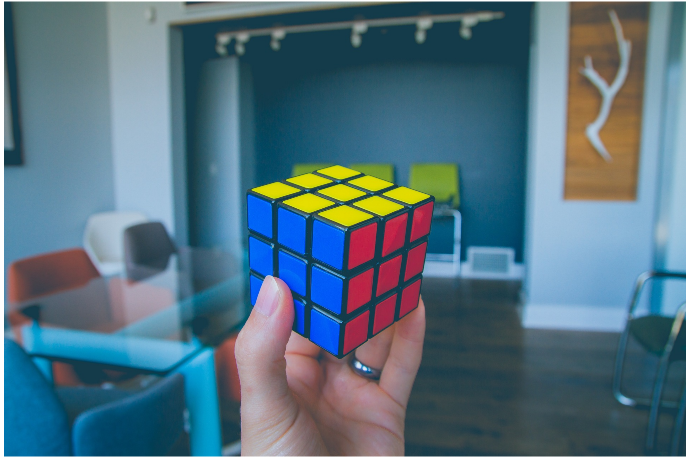
Método de Newton
La ventaja de su uso

Entonces, el polinomio de Newton de grado 3 que interpola dichos puntos queda como sigue:

$$
\begin{aligned}
P_3(x) =& f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
=& P_2(x) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - 0)(x - 2)(x - 3) \\
=& -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{7}{2}x + 1.
\end{aligned}
$$

Método de Newton

En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!



Interpolación polinomial

2021-11-02

Método de Newton

Método de Newton
En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!