Interpolación de Chebyshev (Parte I)

Análisis Numérico

Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

2021-11-18

Interpolación polinomial

Interpolación de Chebyshev (Parte I)
Análisis Numérico
Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

Objetivo

Interpolación de Chebyshev (Parte I)

Agenda:

- El fenómeno de Runge.
- Teorema de minimización del error de interpolación en $[-1, 1]$.
- Ejemplo numérico.

2021-11-18

Interpolación polinomial

Objetivo

Objetivo
Interpolación de Chebyshev (Parte I)
Agenda:
- El fenómeno de Runge.
- Teorema de minimización del error de interpolación en $[-1, 1]$.
- Ejemplo numérico.

Tenemos que el error de interpolación en $[x_0, x_n]$ se calcula como

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

donde $c \in (x_0, x_n)$. Y, en $[-1, 1]$, el error máximo está dado por

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|.$$

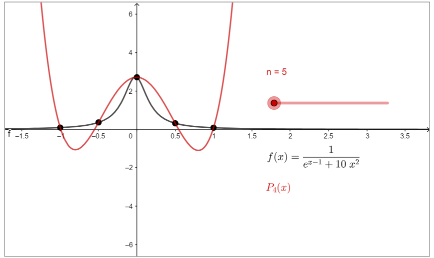
Para controlar el error podemos:

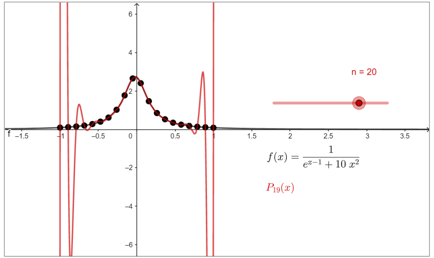
1. Agregar puntos para construir el polinomio interpolador.
2. Redistribuir los puntos.

Interpolación de Chebyshev (Parte I)
El error de interpolación
Tenemos que el error de interpolación en $[x_0, x_n]$ se calcula como
$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$
donde $c \in (x_0, x_n)$. Y, en $[-1, 1]$, el error máximo está dado por
$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|.$$
Para controlar el error podemos:
1. Agregar puntos para construir el polinomio interpolador.
2. Redistribuir los puntos.

Runge observó en los extremos del intervalo una pronunciada oscilación de polinomios interpoladores de alto grado construidos a partir de puntos uniformemente espaciados:

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - P_n(x)| = \infty \quad \text{(fenómeno de Runge).}$$

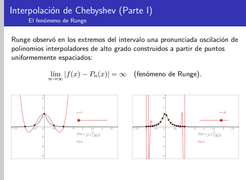




2021-11-18

Interpolación polinomial

Interpolación de Chebyshev (Parte I)



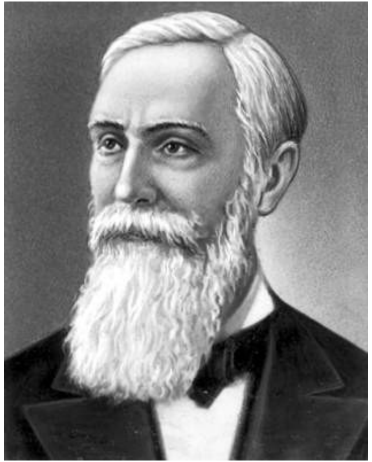
Interpolación de Chebyshev (Parte I)

Polinomios de Chebyshev

Chebyshev demostró que, en $[-1, 1]$, la oscilación se minimiza si se escogen los puntos de forma que

$$\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$$

donde $T_{n+1}(x)$ es el polinomio de Chebyshev de grado $n + 1$.

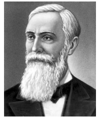


Interpolación de Chebyshev (Parte I)
Polinomios de Chebyshev

Chebyshev demostró que, en $[-1, 1]$, la oscilación se minimiza si se escogen los puntos de forma que

$$\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$$

donde $T_{n+1}(x)$ es el polinomio de Chebyshev de grado $n + 1$.



Algunas propiedades de dichos polinomios en $[-1, 1]$:

1. $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, donde $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$.
2. Su grado es $n + 1$; y su coeficiente principal, 2^n.
3. $T_{n+1}(1) = 1$ y $T_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$.
4. Su representación trigonométrica está dada por

$$T_{n+1}(x) = \cos(n+1)y = \cos(ny)\cos(y) - \operatorname{sen}(ny)\operatorname{sen}(y)$$

   donde $y = \arccos x$.
5. $\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_{n+1}(x)| = 1$ ya que $T_{n+1}(x) = \cos(y)$ para toda y.
6. Todas las raíces de $T_{n+1}(x)$, se encuentran entre -1 y 1, son la solución de $\cos\left((n+1)\arccos(x)\right) = 0$ y tienen la forma

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right),$$

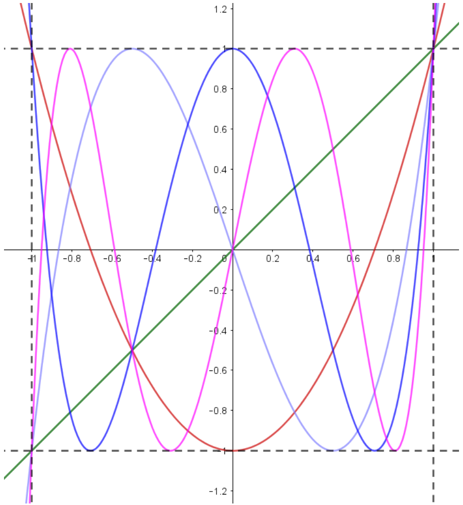
   abscisas que se conocen como *nodos de Chebyshev* en $[-1, 1]$.

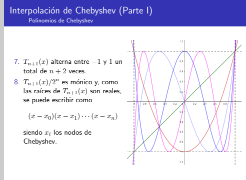
Interpolación de Chebyshev (Parte I)
Polinomios de Chebyshev
Algunas propiedades de dichos polinomios en $[-1, 1]$:
1. $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, donde $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$.
2. Su grado es $n + 1$; y su coeficiente principal, 2^n.
3. $T_{n+1}(1) = 1$ y $T_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$.
4. Su representación trigonométrica está dada por
$$T_{n+1}(x) = \cos(n+1)y = \cos(ny)\cos(y) - \operatorname{sen}(ny)\operatorname{sen}(y)$$
donde $y = \arccos x$.
5. $\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_{n+1}(x)| = 1$ ya que $T_{n+1}(x) = \cos(y)$ para toda y.
6. Todas las raíces de $T_{n+1}(x)$, se encuentran entre -1 y 1, son la solución de $\cos\left((n+1)\arccos(x)\right) = 0$ y tienen la forma
$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right),$$
abscisas que se conocen como *nodos de Chebyshev* en $[-1, 1]$.

7. $T_{n+1}(x)$ alterna entre -1 y 1 un total de $n+2$ veces.
8. $T_{n+1}(x)/2^n$ es mónico y, como las raíces de $T_{n+1}(x)$ son reales, se puede escribir como

$$(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

siendo x_i los nodos de Chebyshev.





2021-11-18

Interpolación polinomial

Interpolación de Chebyshev (Parte I)

Interpolación de Chebyshev (Parte I)
Polinomios de Chebyshev

Teorema

La selección de los valores $-1 \leq x_0, \ldots, x_n \leq 1$ que hacen que el valor de

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

sea lo más pequeño posible es:

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right), \; i = 0, 1, \ldots, n,$$

y el valor mínimo es $\frac{1}{2^n}$. De hecho, el mínimo es alcanzado por

$$(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x).$$

Interpolación de Chebyshev (Parte I)
Minimización del error de interpolación

Teorema

La selección de los valores $-1 \leq x_0, \ldots, x_n \leq 1$ que hacen que el valor de

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

sea lo más pequeño posible es:

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right), \; i = 0, 1, \ldots, n,$$

y el valor mínimo es $\frac{1}{2^n}$. De hecho, el mínimo es alcanzado por

$$(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x).$$

Demostración: Supongamos que existe $P_{n+1}(x)$, un polinomio mónico con un máximo absoluto menor a $\frac{1}{2^n}$ en $[-1, 1]$,

$$|P_{n+1}(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Como $T_{n+1}(x)$ alterna $n+2$ veces entre -1 y 1, en dicho intervalo la diferencia

$$T_{n+1}(x) - \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$$

es alternadamente positiva y negativa. Por lo tanto, $P_{n+1} - \frac{T_{n+1}}{2^n}$ tiene $n+1$ raíces. Esto contradice el hecho de que

$$T_{n+1}(x) - \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$$

constituye un polinomio de grado menor o igual a n. $\square$.

Interpolación de Chebyshev (Parte I)
Minimización del error de interpolación
Demostración: Supongamos que existe $P_{n+1}(x)$, un polinomio mónico con un máximo absoluto menor a $\frac{1}{2^n}$ en $[-1, 1]$,
$$|P_{n+1}(x)| < \frac{1}{2^n}.$$
Como $T_{n+1}(x)$ alterna $n+2$ veces entre -1 y 1, en dicho intervalo la diferencia
$$T_{n+1}(x) - \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$$
es alternadamente positiva y negativa. Por lo tanto, $P_{n+1} - \frac{T_{n+1}}{2^n}$ tiene $n+1$ raíces. Esto contradice el hecho de que
$$T_{n+1}(x) - \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$$
constituye un polinomio de grado menor o igual a n. $\square$

Ejemplo:

a) Encuentra los nodos de Chebyshev para construir un polinomio interpolador de grado 4 en $[-1,1]$.

b) Encuentra la cota máxima del error entre $f(x)=e^x$ y el polinomio de grado $n=4$ construido con nodos de Chebyshev.

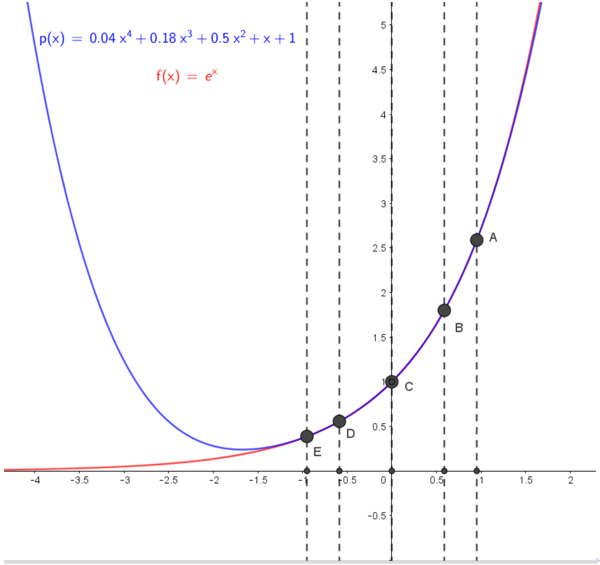
Solución: Para el inciso a) como

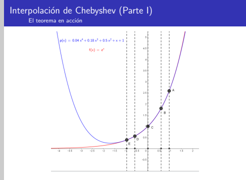
$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right),\ i=0,1,2,3 \text{ y } 4,$$

tenemos que $x_0=\cos\frac{\pi}{10}$, $x_1=\cos\frac{3\pi}{10}$, $x_2=\cos\frac{5\pi}{10}$, $x_3=\cos\frac{7\pi}{10}$, y $x_4=\cos\frac{9\pi}{10}$.

Interpolación de Chebyshev (Parte I)

El teorema en acción





Para el inciso b) tenemos que

$$f(x) - P_4(x) = \frac{1}{5!} f^{(5)}(c) \prod_{i=0}^{4} (x - x_i)$$

con $c \in (-1, 1)$.
Por el teorema de Chebyshev, se sabe que $\left|\prod_{i=0}^{4} (x - x_i)\right| \leq \frac{1}{2^4}$ para $-1 \leq x \leq 1$. Y, además, $\left|f^{(5)}\right| \leq e^1$ en $[-1, 1]$.
Entonces, en este caso:

$$|f(x) - P_4(x)| \leq \frac{1}{120} e^1 \frac{1}{2^4} \approx 0.00142$$

para toda x en $[-1, 1]$.

2021-11-18

Interpolación de Chebyshev (Parte I)

En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!

2021-11-18

Interpolación de Chebyshev (Parte I)

Interpolación de Chebyshev (Parte I)
En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!