# Interpolación de Chebyshev (Parte II)

## Análisis Numérico

Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

FES UNAM ACATLÁN



2021-11-18

Interpolación polinomial

Interpolación de Chebyshev (Parte II)
Análisis Numérico
Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx
FES UNAM ACATLÁN

# Objetivo

## Interpolación de Chebyshev (Parte II)

Agenda:

- Teorema de minimización del error de interpolación en $[a, b]$.
- Ejemplo numérico.

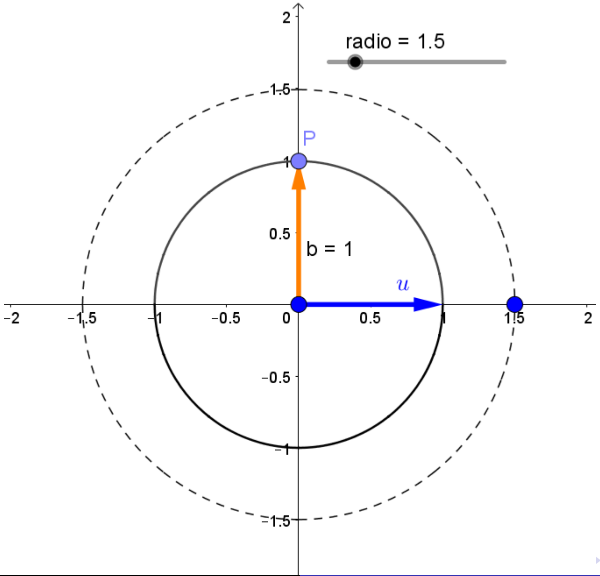


2021-11-18

Interpolación polinomial

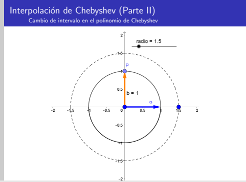
Objetivo

Objetivo
Interpolación de Chebyshev (Parte II)
Agenda:
- Teorema de minimización del error de interpolación en $[a, b]$.
- Ejemplo numérico.


radio = 1.5
P
b = 1
u
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
0

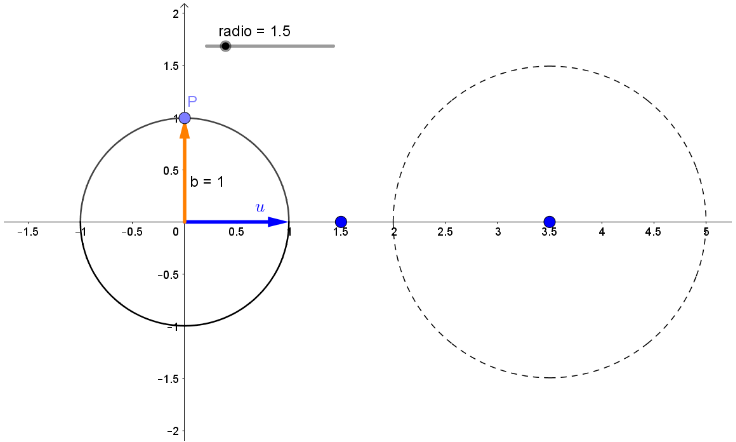






# Interpolación de Chebyshev (Parte II)

## Cambio de intervalo en el polinomio de Chebyshev

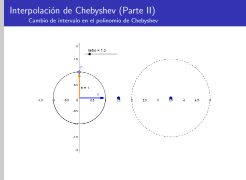





2021-11-18

Interpolación polinomial

Interpolación de Chebyshev (Parte II)



# Interpolación de Chebyshev (Parte II)

## Cambio de intervalo en el polinomio de Chebyshev

Para poder calcular los nodos que minimizan la oscilación en el intervalo $[a, b]$ distinto de $[-1, 1]$, se requiere:

1) Expandir los puntos por el factor $\frac{b-a}{2}$.
2) Trasladar los puntos a $\frac{b+a}{2}$.

Es decir, emplear la transformación $\alpha x_i + \beta$.

$$\left(\frac{b-a}{2}\right) \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right) + \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

donde $\alpha = \frac{b-a}{2}$ y $\beta = \frac{b+a}{2}$.
Debido a la nueva amplitud $\frac{b-a}{2}$, es necesario ajustar la cota del error: el valor mínimo $\frac{1}{2^n}$ debe reemplazarse por $\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}}{2^n}$.



Interpolación polinomial

2021-11-18

Interpolación de Chebyshev (Parte II)

Interpolación de Chebyshev (Parte II)
Cambio de intervalo en el polinomio de Chebyshev
Para poder calcular los nodos que minimizan la oscilación en el intervalo $[a, b]$ distinto de $[-1, 1]$, se requiere:
1) Expandir los puntos por el factor $\frac{b-a}{2}$.
2) Trasladar los puntos a $\frac{b+a}{2}$.
Es decir, emplear la transformación $\alpha x_i + \beta$.
$$\left(\frac{b-a}{2}\right) \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right) + \left(\frac{b+a}{2}\right)$$
donde $\alpha = \frac{b-a}{2}$ y $\beta = \frac{b+a}{2}$.
Debido a la nueva amplitud $\frac{b-a}{2}$, es necesario ajustar la cota del error: el valor mínimo $\frac{1}{2^n}$ debe reemplazarse por $\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}}{2^n}$.

# Interpolación de Chebyshev (Parte II)

## Minimización del error en $[a, b]$

**Teorema**

Sean $x_i = \left(\frac{b-a}{2}\right)\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right) + \left(\frac{b+a}{2}\right)$, con $i = 0, 1, \ldots, n$ tales que $x_i \in [a, b]$. Entonces, la siguiente desigualdad se cumple en dicho intervalo

$$|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)| \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}}{2^n}.$$



2021-11-18

Interpolación polinomial

└ Interpolación de Chebyshev (Parte II)

Interpolación de Chebyshev (Parte II)
Minimización del error en $[a, b]$

Teorema

Sean $x_i = \left(\frac{b-a}{2}\right)\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right) + \left(\frac{b+a}{2}\right)$, con $i = 0, 1, \ldots, n$ tales que $x_i \in [a, b]$. Entonces, la siguiente desigualdad se cumple en dicho intervalo

$$|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)| \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}}{2^n}.$$

Ejemplo: Encuentra cuatro nodos de Chebyshev para el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y encuentra la cota superior del error para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en dicho intervalo para el polinomio interpolador de Chebyshev correspondiente.
Solución:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \left(\frac{\pi/2 - 0}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{\pi/2 + 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4} \\
x_1 &= \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4} \\
x_2 &= \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4} \\
x_3 &= \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$





Interpolación de Chebyshev (Parte II)
El teorema en acción
Ejemplo: Encuentra cuatro nodos de Chebyshev para el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y encuentra la cota superior del error para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en dicho intervalo para el polinomio interpolador de Chebyshev correspondiente.
Solución:

# Interpolación de Chebyshev (Parte II)

## El teorema en acción

De acuerdo con el teorema ajustado

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{sen}(x) - P_3(x)| &= \frac{|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|}{4!}|f^{(4)}(c)| \\
&\leq \frac{\left(\frac{\pi/2-0}{2}\right)^4}{4!2^3}(1) \approx 0.00198
\end{aligned}
$$

en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.





Interpolación de Chebyshev (Parte II)
El teorema en acción
De acuerdo con el teorema ajustado
$$|\operatorname{sen}(x) - P_3(x)| = \frac{|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|}{4!}|f^{(4)}(c)| \leq \frac{\left(\frac{\pi/2-0}{2}\right)^4}{4!2^3}(1) \approx 0.00198$$
en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

# Interpolación de Chebyshev (Parte II)

## En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!



2021-11-18

Interpolación polinomial

Interpolación de Chebyshev (Parte II)

Interpolación de Chebyshev (Parte II)
En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!