Splines cúbicas

Análisis Numérico

Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx

FES
UNAM
ACATLÁN

2021-11-18

Interpolación polinomial

Splines cúbicas
Análisis Numérico
Mayra Lorena Díaz Sosa
834074@pcpuma.acatlan.unam.mx
FES
UNAM
ACATLÁN

Objetivo

Splines cubicas

Agenda:

- Definición de spline cúbica y sus propiedades.
- *SEL* asociado a la construcción de una spline cúbica.
- Ejemplo numérico.

2021-11-18

Interpolación polinomial

Objetivo

Objetivo
Splines cubicas
Agenda:
- Definición de spline cúbica y sus propiedades.
- *SEL* asociado a la construcción de una spline cúbica.
- Ejemplo numérico.

Splines cúbicas

Características del algoritmo

Las curvas o splines son una alternativa a la interpolación de datos. En lugar de ocupar una fórmula única para construir un polinomio que pase por una serie de puntos, usan varias fórmulas.
De manera que una spline cúbica es un conjunto de polinomios cúbicos construidos a partir de $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

2021-11-18

Interpolación polinomial

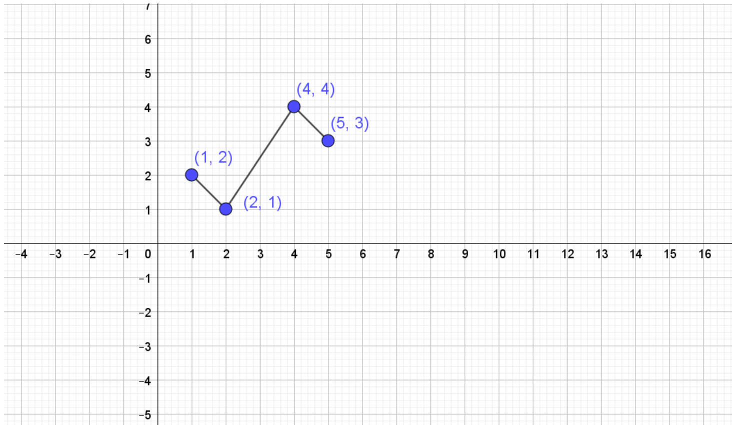
Splines cúbicas

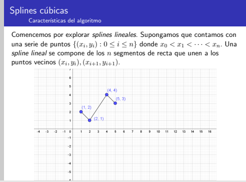
Splines cúbicas
Características del algoritmo
Las curvas o splines son una alternativa a la interpolación de datos. En lugar de ocupar una fórmula única para construir un polinomio que pase por una serie de puntos, usan varias fórmulas.
De manera que una spline cúbica es un conjunto de polinomios cúbicos construidos a partir de $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Splines cúbicas

Características del algoritmo

Comencemos por explorar *splines lineales*. Supongamos que contamos con una serie de puntos $\{(x_i, y_i) : 0 \leq i \leq n\}$ donde $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Una *spline lineal* se compone de los n segmentos de recta que unen a los puntos vecinos $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$.





Definición

Una *spline cúbica* (*SC*), $s(x)$ a través de los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ es el conjunto de polinomios cúbicos:

$$
\begin{aligned}
s_1(x) &= y_0 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3 \text{ en } [x_0, x_1].\\
s_2(x) &= y_1 + b_2(x - x_1) + c_2(x - x_1)^2 + d_2(x - x_1)^3 \text{ en } [x_1, x_2].\\
&\ \vdots\\
s_n(x) &= y_{n-1} + b_n(x - x_{n-1}) + c_n(x - x_{n-1})^2\\
&\qquad + d_n(x - x_{n-1})^3 \text{ en } [x_{n-1}, x_n].
\end{aligned}
$$

donde todas las x_i son distintas entre sí, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ y...

2021-11-18

Interpolación polinomial

Splines cúbicas

Definición (Continuación)

1. La *SC* interpola los puntos dados.

$$s_{i+1}(x_i) = y_i \text{ y } s_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}, i = 0, \ldots, n-1.$$

2. Las pendientes de las partes adyacentes de la *SC* a concordar en los puntos donde se encuentran son uniformes.

$$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

3. La curvatura de la *SC* es uniforme.

$$s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i) \text{ para } i = 1, \ldots, n-1.$$

Splines cúbicas
Qué propiedades tienen
Definición (Continuación)
1. La SC interpola los puntos dados.
$s_{i+1}(x_i) = y_i$ y $s_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}, i = 0, \ldots, n-1.$
2. Las pendientes de las partes adyacentes de la SC a concordar en los puntos donde se encuentran son uniformes.
$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n-1.$
3. La curvatura de la SC es uniforme.
$s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n-1.$

Splines cúbicas

O sea. . . ¡no todo conjunto de polinomios cúbicos es *SC*!

Ejemplo: Verifica que

$$
\begin{aligned}
s_1(x) &= 2 - \frac{13}{8}(x-1) + 0(x-1)^2 + \frac{5}{8}(x-1)^3 \text{ en } [1,2].\\
s_2(x) &= 1 + \frac{1}{4}(x-2) + \frac{15}{8}(x-2)^2 - \frac{5}{8}(x-2)^3 \text{ en } [2,4].\\
s_3(x) &= 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{15}{8}(x-4)^2 + \frac{5}{8}(x-4)^3 \text{ en } [4,5].
\end{aligned}
$$

es una *spline cúbica* para los puntos $(1,2),(2,1),(4,4),(5,3)$.

Splines cúbicas
O sea. . . ¡no todo conjunto de polinomios cúbicos es SC!
Ejemplo: Verifica que
$s_1(x) = 2 - \frac{13}{8}(x-1) + 0(x-1)^2 + \frac{5}{8}(x-1)^3$ en $[1,2]$.
$s_2(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-2) + \frac{15}{8}(x-2)^2 - \frac{5}{8}(x-2)^3$ en $[2,4]$.
$s_3(x) = 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{15}{8}(x-4)^2 + \frac{5}{8}(x-4)^3$ en $[4,5]$.
es una spline cúbica para los puntos $(1,2),(2,1),(4,4),(5,3)$.

Solución:

Propiedad 1)

$$
\begin{aligned}
s_1(x_0) &= s_1(1) = 2 = y_0, & s_1(x_1) &= s_1(2) = 1 = y_1,\\
s_2(x_1) &= s_2(2) = 1 = y_1, & s_2(x_2) &= s_2(4) = 4 = y_2,\\
s_3(x_2) &= s_3(4) = 4 = y_2, & s_3(x_3) &= s_3(5) = 3 = y_3.
\end{aligned}
$$

Propiedad 2)

$$
\begin{aligned}
s_1'(x) &= -\frac{13}{8} + \frac{15}{8}(x-1)^2.\\
s_2'(x) &= \frac{1}{4} + \frac{30}{8}(x-2) - \frac{15}{8}(x-2)^2.\\
s_3'(x) &= \frac{1}{4} - \frac{30}{8}(x-4) + \frac{15}{8}(x-4)^2.
\end{aligned}
$$

2021-11-18

Interpolación polinomial

Splines cúbicas

Splines cúbicas

O sea. . . ¡no todo conjunto de polinomios cúbicos es *SC*!

Solución:

Propiedad 1)

Propiedad 2)

por lo cual

$$s_1'(x_1) = s_1'(2) = \frac{1}{4} \text{ y } s_2'(x_1) = s_2'(2) = \frac{1}{4}.$$
$$s_2'(x_2) = s_2'(4) = \frac{1}{4} \text{ y } s_3'(x_2) = s_3'(4) = \frac{1}{4}.$$

Propiedad 3)

$$s_1''(x) = \frac{30}{8}(x-1).$$
$$s_2''(x) = \frac{30}{8} - \frac{30}{8}(x-2).$$
$$s_3''(x) = -\frac{30}{8} + \frac{30}{8}(x-4).$$

Splines cúbicas
O sea…¡no todo conjunto de polinomios cúbicos es SC!
por lo cual
$s_1'(x_1) = s_1'(2) = \frac{1}{4}$ y $s_2'(x_1) = s_2'(2) = \frac{1}{4}$.
$s_2'(x_2) = s_2'(4) = \frac{1}{4}$ y $s_3'(x_2) = s_3'(4) = \frac{1}{4}$.
Propiedad 3)
$s_1''(x) = \frac{30}{8}(x-1)$.
$s_2''(x) = \frac{30}{8} - \frac{30}{8}(x-2)$.
$s_3''(x) = -\frac{30}{8} + \frac{30}{8}(x-4)$.

Splines cúbicas

O sea... ¡no todo conjunto de polinomios cúbicos es *SC*!

Por lo cual

$$s_1''(x_1) = s_1''(2) = \frac{15}{4} \text{ y } s_2''(x_1) = s_2''(2) = \frac{15}{4}.$$
$$s_2''(x_2) = s_2''(4) = -\frac{15}{4} \text{ y } s_3''(x_2) = s_3''(4) = -\frac{15}{4}.$$

Como $s(x)$ cumple las tres propiedades, entonces $s(x)$ es una *SC*.

Splines cúbicas
O sea... ¡no todo conjunto de polinomios cúbicos es SC!
Por lo cual
$$s_1''(x_1) = s_1''(2) = \frac{15}{4} \text{ y } s_2''(x_1) = s_2''(2) = \frac{15}{4}.$$
$$s_2''(x_2) = s_2''(4) = -\frac{15}{4} \text{ y } s_3''(x_2) = s_3''(4) = -\frac{15}{4}.$$
Como $s(x)$ cumple las tres propiedades, entonces $s(x)$ es una SC.

Las condiciones impuestas por la definición de *SC* constituyen un *SEL* indeterminado:

(P1) $s_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$ (n ecuaciones).
(P2) $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$ ($n-1$ ecuaciones).
(P3) $s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i)$ ($n-1$ ecuaciones).

El *SEL* es de $3n-2$ ecuaciones con $3n$ incógnitas (los tres coeficientes de cada $s_i(x)$).

2021-11-18

Interpolación polinomial

Splines cúbicas

Splines cúbicas
Cómo se construyen a partir de un conjunto de puntos

Las condiciones impuestas por la definición de *SC* constituyen un *SEL* indeterminado:
(P1) $s_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$ (n ecuaciones).
(P2) $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$ ($n-1$ ecuaciones).
(P3) $s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i)$ ($n-1$ ecuaciones).

El *SEL* es de $3n-2$ ecuaciones con $3n$ incógnitas (los tres coeficientes de cada $s_i(x)$).

Para volver al *SEL* determinado se añaden dos restricciones más denominadas *condiciones de los extremos*.

SC natural

4 Se permite que la *SC* tenga un punto de inflexión en cada extremo del intervalo.

$$s_1''(x_0) = 0 \text{ y } s_n''(x_n) = 0.$$

Ejemplo: En el ejemplo anterior,

$$s_1''(1) = 0 \text{ y } s_3''(5) = 0.$$

por lo que se trata de una *SC natural*.

Splines cúbicas
Cómo se construyen a partir de un conjunto de puntos
Para volver al SEL determinado se añaden dos restricciones más denominadas condiciones de los extremos.
SC natural
4 Se permite que la SC tenga un punto de inflexión en cada extremo del intervalo.
$s_1''(x_0) = 0$ y $s_n''(x_n) = 0$.
Ejemplo: En el ejemplo anterior,
$s_1''(1) = 0$ y $s_3''(5) = 0$.
por lo que se trata de una SC natural.

Considerando las dos restricciones de la Propiedad 4, se tiene un *SEL* de $3n$ ecuaciones con $3n$ incógnitas que permite hallar los coeficientes de la *SC*.
El *SEL* para una *SC* natural está dado por$A\vec{c} = \vec{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & 2(\delta_1 + \delta_2) & \delta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 2(\delta_2 + \delta_3) & \delta_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_{n-1} & 2(\delta_{n-1} + \delta_n) & \delta_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Splines cúbicas

Cómo se construyen a partir de un conjunto de puntos

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, c_{n+1})^T,$$

$$\vec{b} = \left(0, 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1}\right), 3\left(\frac{\Delta_3}{\delta_3} - \frac{\Delta_2}{\delta_2}\right), \ldots, 3\left(\frac{\Delta_n}{\delta_n} - \frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}}\right), 0\right)^T$$

y los valores δ_i, Δ_i, d_i, b_i están dados por las siguientes ecuaciones

$$\delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i = y_i - y_{i-1},$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i} \text{ y } b_i = \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{1}{3}\delta_i(2c_i + c_{i+1}).$$

Splines cúbicas
Cómo se construyen a partir de un conjunto de puntos
y los valores δ_i, Δ_i, d_i, b_i están dados por las siguientes ecuaciones

Ejemplo: Encuentra la *SC* natural que pasa por $\{(1,2),(2,1),(4,4),(5,3)\}$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= x_1 - x_0 = 1, & \Delta_1 &= y_1 - y_0 = -1,\\
\delta_2 &= x_2 - x_1 = 2, & \Delta_2 &= y_2 - y_1 = 3,\\
\delta_3 &= x_3 - x_2 = 1, & \Delta_3 &= y_3 - y_2 = -1.
\end{aligned}$$

El *SEL* queda de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15/2 \\ -15/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Splines cúbicas
El algoritmo en acción
Ejemplo: Encuentra la *SC* natural que pasa por $\{(1,2),(2,1),(4,4),(5,3)\}$.
Solución:
El *SEL* queda de la siguiente forma:

En este caso,

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{15}{8}, \quad c_3 = -\frac{15}{8}, \quad c_4 = 0;$$

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3\delta_1} = \frac{5}{8}, \quad d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3\delta_2} = -\frac{5}{8}, \quad d_3 = \frac{c_4 - c_3}{3\delta_3} = \frac{5}{8};$$

y

$$b_1 = \frac{\Delta_1}{\delta_1} - \frac{1}{3}\delta_1(2c_1 + c_2) = -\frac{13}{8}, \quad b_2 = \frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{1}{3}\delta_2(2c_2 + c_3) = \frac{1}{4},$$

$$b_3 = \frac{\Delta_3}{\delta_3} - \frac{1}{3}\delta_3(2c_3 + c_4) = \frac{1}{4}.$$

Splines cúbicas

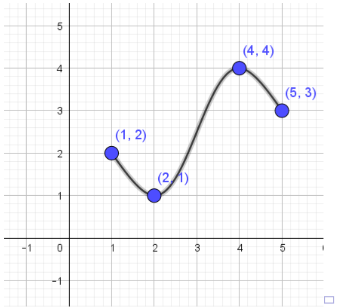
El algoritmo en acción

La *SC* buscada es

$$s_1(x) = 2 - \frac{13}{8}(x-1) + (0)(x-1)^2 + \frac{5}{8}(x-1)^3 \text{ para } x \in [1,2].$$

$$s_2(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-2) + \frac{15}{8}(x-2)^2 - \frac{5}{8}(x-2)^3 \text{ para } x \in [2,4].$$

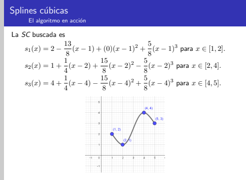
$$s_3(x) = 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{15}{8}(x-4)^2 + \frac{5}{8}(x-4)^3 \text{ para } x \in [4,5].$$



2021-11-18

Interpolación polinomial

Splines cúbicas


Splines cúbicas
El algoritmo en acción
La *SC* buscada es

Splines cúbicas

En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!

Splines cúbicas
En sus marcas, ¿listos? . . . ¡Fuera!