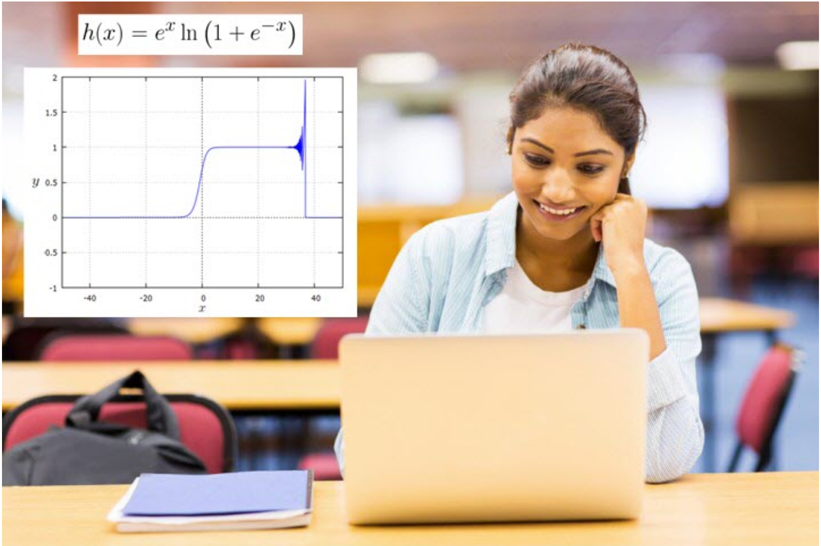
Ejemplo de limitaciones de los CAS

Graficación por computadora

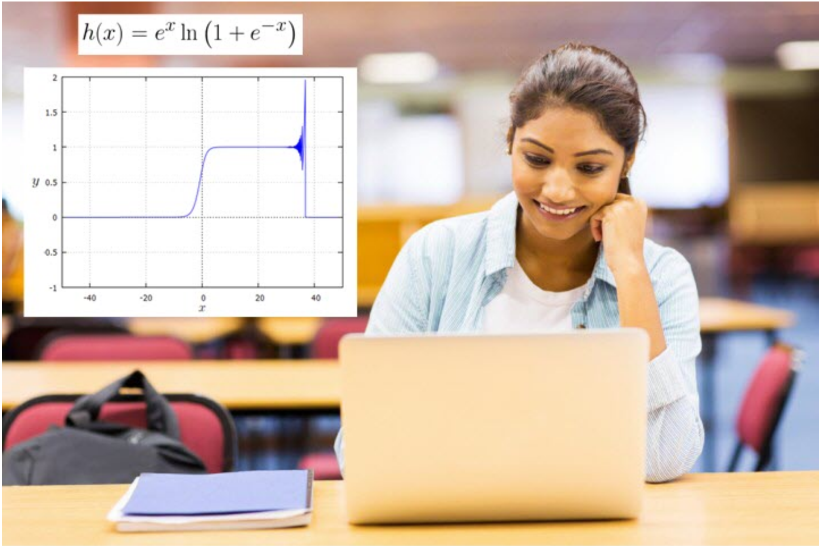
Profra. Mayra Lorena Díaz Sosa
mlds@apolo.acatlan.unam.mx

Sistemas de Álgebra Computacional

Especialización TEDIEM



$h(x) = e^{x} \ln\left(1 + e^{-x}\right)$
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
y
-40
-20
0
20
40
x



$h(x) = e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right)$
2
1.5
1
y 0.5
0
-0.5
-1
-40
-20
0
20
40
x

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Objetivos:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

Objetivos:

- Identificar diversos tipos de formas indeterminadas.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Objetivos:

- Identificar diversos tipos de formas indeterminadas.
- Presentar las reglas de L'Hospital e identificar cuándo pueden aplicarse.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Objetivos:

- Identificar diversos tipos de formas indeterminadas.
- Presentar las reglas de L'Hospital e identificar cuándo pueden aplicarse.
- Presentar la fórmula de Taylor y aplicarla al cálculo de límites.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Objetivos:

- Identificar diversos tipos de formas indeterminadas.
- Presentar las reglas de L'Hospital e identificar cuándo pueden aplicarse.
- Presentar la fórmula de Taylor y aplicarla al cálculo de límites.
- Reconocer la utilidad práctica del tema y un ejemplo de las limitantes de los CAS.

Notación:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Notación:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Definición de límite

Se dice que el número L es el *límite de la función* f en x_0 si para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el dominio de f y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Notación:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Definición de límite

Se dice que el número L es el *límite de la función* f en x_0 si para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el dominio de f y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Notación:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Definición de límite

Se dice que el número L es el *límite de la función* f en x_0 si para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el dominio de f y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Tipo	**Ejemplo**
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Tipo	**Ejemplo**
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1/x^2\right)}{\cot\left(x^2\right)}$

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1/x^2\right)}{\cot\left(x^2\right)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1/x\right)$

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1/x^2\right)}{\cot\left(x^2\right)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x)$
$[\infty-\infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\tan(x)-\frac{1}{\pi-2x}\right)$

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1/x^2\right)}{\cot\left(x^2\right)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x)$
$[\infty-\infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\tan(x)-\frac{1}{\pi-2x}\right)$
$\left[0^0\right]$	$\lim_{x\to 0^+} x^x$

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1/x^2\right)}{\cot\left(x^2\right)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x)$
$[\infty-\infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\tan(x)-\frac{1}{\pi-2x}\right)$
$\left[0^0\right]$	$\lim_{x\to 0^+} x^x$
$\left[\infty^0\right]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\tan(x))^{\cos(x)}$

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1/x^2\right)}{\cot\left(x^2\right)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x)$
$[\infty-\infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi-2x}\right)$
$\left[0^0\right]$	$\lim_{x\to 0^+} x^x$
$\left[\infty^0\right]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1/x^2\right)}{\cot(x^2)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x)$
$[\infty-\infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\tan(x)-\frac{1}{\pi-2x}\right)$
$[0^0]$	$\lim_{x\to 0^+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1/x^2\right)}{\cot\left(x^2\right)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x)$
$[\infty-\infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\tan(x)-\frac{1}{\pi-2x}\right)$
$\left[0^0\right]$	$\lim_{x\to 0^+} x^x$
$\left[\infty^0\right]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1/x^2\right)}{\cot(x^2)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x)$
$[\infty-\infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi-2x}\right)$
$\left[0^0\right]$	$\lim_{x\to 0^+} x^x$
$\left[\infty^0\right]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1/x^2\right)}{\cot(x^2)}$
$[0\cdot\infty]$	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x)$
$[\infty-\infty]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi-2x}\right)$
$[0^0]$	$\lim_{x\to 0^+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y

(ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y

(ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ y

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y

(ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y

(ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ y

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ y

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ y

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ y

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ y

(ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ y

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ y

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ y

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ y

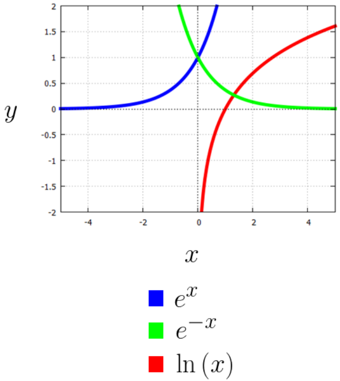
(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,

entonces

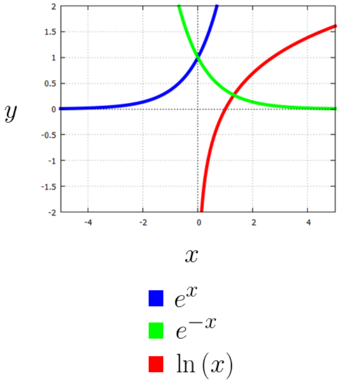
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^{x} \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

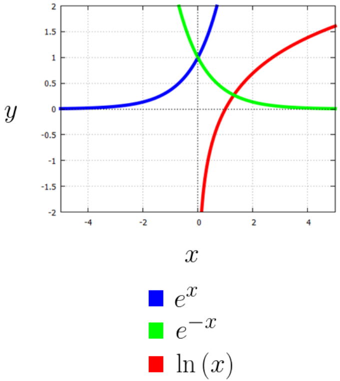
$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^{x} \ln\left(1+e^{-x}\right)$$



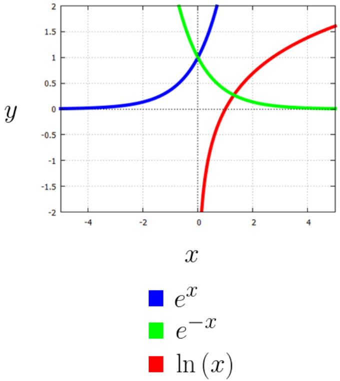
$$\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} e^{x} \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$



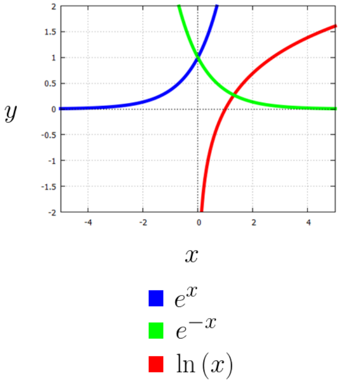
$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^{x} \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$



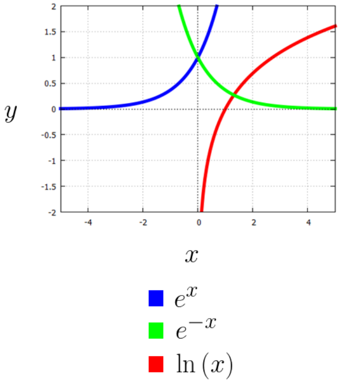
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty} e^x \ln\left(1+e^{-x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\frac{1}{e^x}}\end{aligned}$$



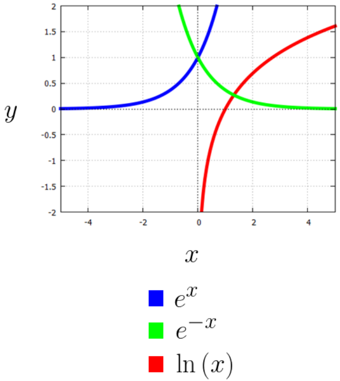
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty} e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\frac{1}{e^{x}}}\end{aligned}$$



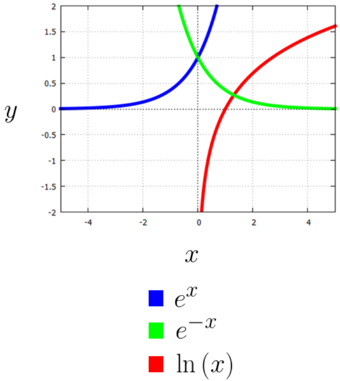
$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\frac{1}{e^{x}}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{e^{x}+1}}{-\frac{1}{e^{x}}}$$



$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty} e^{x} \ln\left(1+e^{-x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\frac{1}{e^{x}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{e^{x}+1}}{-\frac{1}{e^{x}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}}{e^{x}+1}
\end{aligned}$$

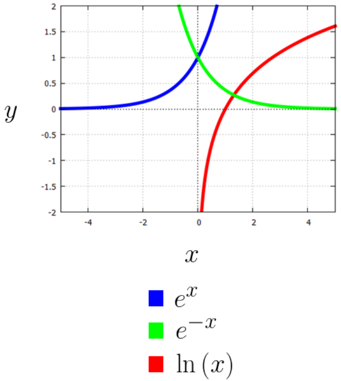


$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty} e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\frac{1}{e^{x}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{e^{x}+1}}{-\frac{1}{e^{x}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}}{e^{x}+1}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}}
\end{aligned}
$$

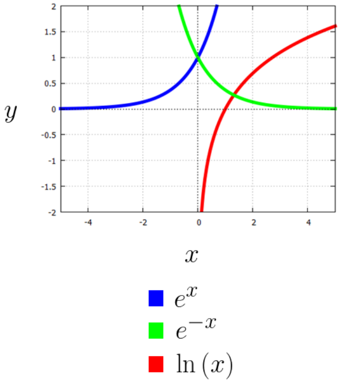


III. Reglas de L'Hospital
Ejemplo 1

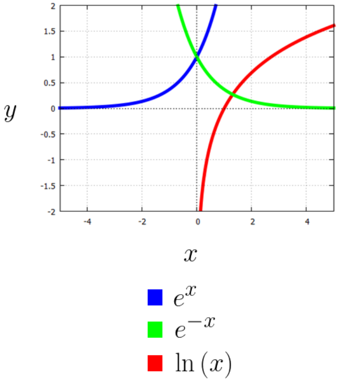
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty} e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\frac{1}{e^{x}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{e^{x}+1}}{-\frac{1}{e^{x}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}}{e^{x}+1}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$



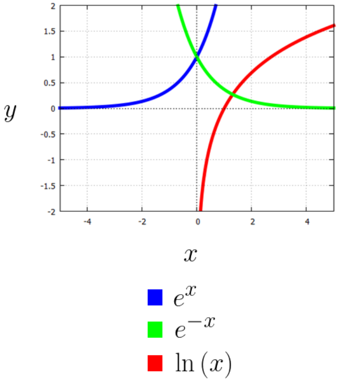
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty} e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\frac{1}{e^{x}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{e^{x}+1}}{-\frac{1}{e^{x}}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}}{e^{x}+1}\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$



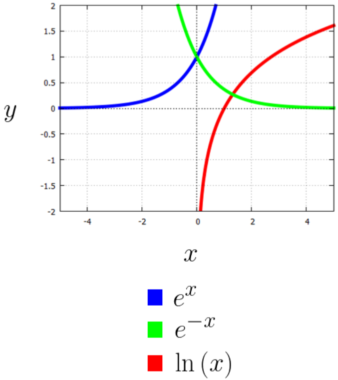
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$$



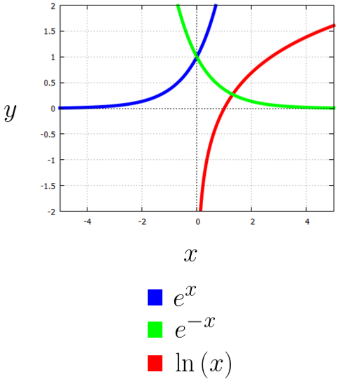
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} h(x) &= \lim_{x\to-\infty} e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\frac{1}{e^{x}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{e^{x}+1}}{-\frac{1}{e^{x}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}}{e^{x}+1}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} h(x) &= \lim_{x\to-\infty} e^x \ln\left(1+e^{-x}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\frac{1}{e^x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{e^x+1}}{-\frac{1}{e^x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} h(x) &= \lim_{x\to-\infty} e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{\frac{1}{e^{x}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{e^{x}+1}}{-\frac{1}{e^{x}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}}{e^{x}+1}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}}\\
&= {\color{red}0}.
\end{aligned}
$$



Teorema de Taylor

Si la derivada de orden $n+1$ de una función f, $f^{(n+1)}(t)$, existe para toda t en un intervalo que contiene a a y x, y si

$$P_n(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

entonces el error $E(x) = f(x) - P_n(x)$ en la aproximación $f(x) \approx P_n(x)$ está dado por

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

donde $s \in (a, x)$.

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\
&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\
&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\
&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\
&= P_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\
&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\
&= P_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\
&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\
&= P_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Si $a = 0$:

$$
\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right).
$$

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\ &= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= P_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo: Si $a = 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right).$$

Y para $n = 1$:

$$\ln(1+x) = x + O\left(x^2\right).$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\
&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\
&= P_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Si $a = 0$:

$$
\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right).
$$

Y para $n = 1$:

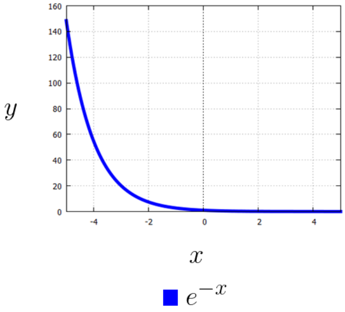
$$
\ln(1+x) = x + O\left(x^2\right).
$$

Si al calcular

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^x \ln\left(1+e^{-x}\right).$$

se sustituye $t = e^{-x}$, $x \to \infty$ corresponde a $t \to 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t + O\left(t^2\right)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} 1 + O(t) \\ &= 1.\end{aligned}$$



De

$$h(x) = e^{x} \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

sabemos que:

De

$$h(x) = e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

sabemos que:

- $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0.$

De

$$h(x) = e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

sabemos que:

- $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0.$
- $\lim_{x \to \infty} h(x) = 1.$

De

$$h(x) = e^{x} \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

sabemos que:

- $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0.$
- $\lim_{x \to \infty} h(x) = 1.$
- $h(0) = e^{0} \ln\left(1 + e^{-0}\right) = \ln(2) \approx 0.7.$

De

$$h(x) = e^x \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

sabemos que:

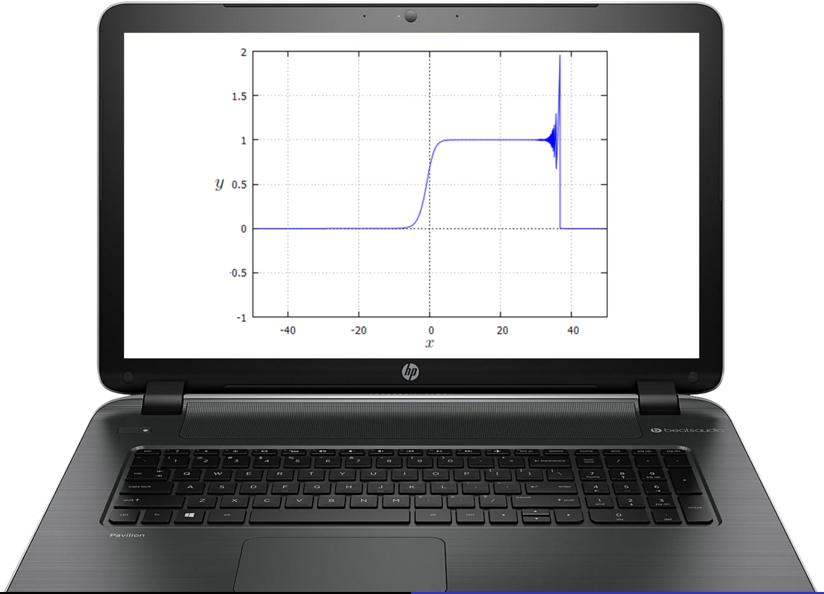
- $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$.
- $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$.
- $h(0) = e^0 \ln\left(1 + e^{-0}\right) = \ln(2) \approx 0.7$.
- $h(x)$ es una función creciente para toda x.

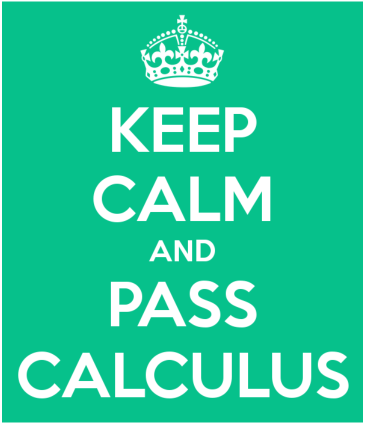
De

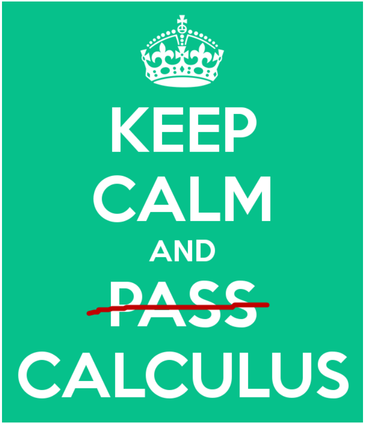
$$h(x) = e^{x} \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

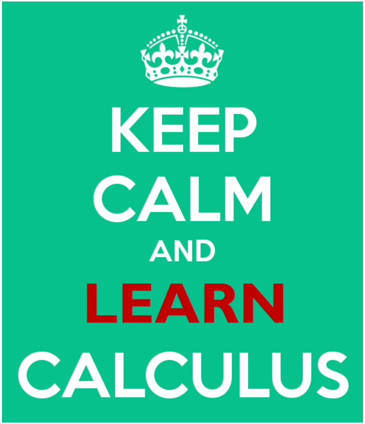
sabemos que:

- $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0.$
- $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1.$
- $h(0) = e^{0} \ln\left(1 + e^{-0}\right) = \ln(2) \approx 0.7.$
- $h(x)$ es una función creciente para toda x.


2
1.5
1
y 0.5
0
-0.5
-1
-40
-20
0
20
40
x


KEEP
CALM
AND
PASS
CALCULUS


KEEP
CALM
AND
~~PASS~~
CALCULUS


KEEP
CALM
AND
LEARN
CALCULUS

- Las reglas de L'Hospital pueden emplearse sólo en indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$.

- Las reglas de L'Hospital pueden emplearse sólo en indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$.
- Si $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$ no existe, no es posible aplicar las reglas de L'Hospital.

- Las reglas de L'Hospital pueden emplearse sólo en indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$.
- Si $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$ no existe, no es posible aplicar las reglas de L'Hospital.
- La fórmula de Taylor puede emplearse para aproximar una función, pero también para evaluar límites del tipo [0/0].

- Las reglas de L'Hospital pueden emplearse sólo en indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$.
- Si $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$ no existe, no es posible aplicar las reglas de L'Hospital.
- La fórmula de Taylor puede emplearse para aproximar una función, pero también para evaluar límites del tipo [0/0].
- Los resultados obtenidos por medio de una computadora deben validarse bajo el rigor de las matemáticas.

VII. Recursos complementarios

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

Reglas de L'Hospital: `bit.ly/1XrCFTO`

Fórmula de Taylor: `bit.ly/1M3G5ex`

- Adams, R. y Essex, Ch. (2010).
  Calculus, A complete course.
  7a. ed. Toronto: Pearson.
- Apostol, T. (2009).
  Calculus I.
  Barcelona: Reverté.
- Haaser, N., LaSalle, J. y Sullivan, J. (1998).
  Análisis matemático, Vol. I.
  México:Trillas.
- Spivak, M. (2003).
  Calculus.
  2a. ed. México: Reverté.

¡Gracias!