

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Profra. Mayra Lorena Díaz Sosa

`mlds@apolo.acatlan.unam.mx`

16 de marzo de 2016

FES Acatlán

I. Introducción

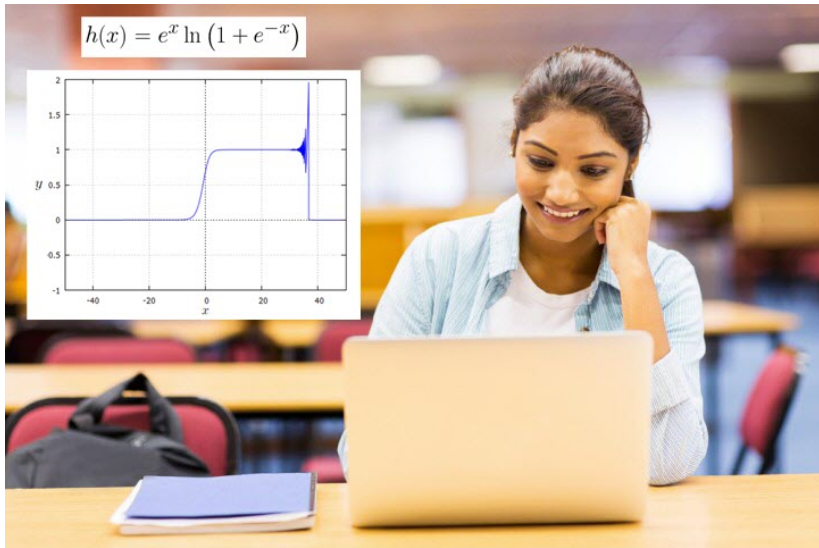
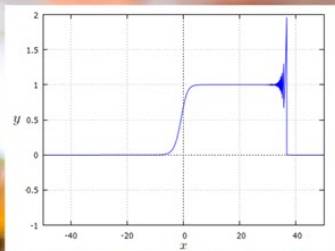
Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor



I. Introducción

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

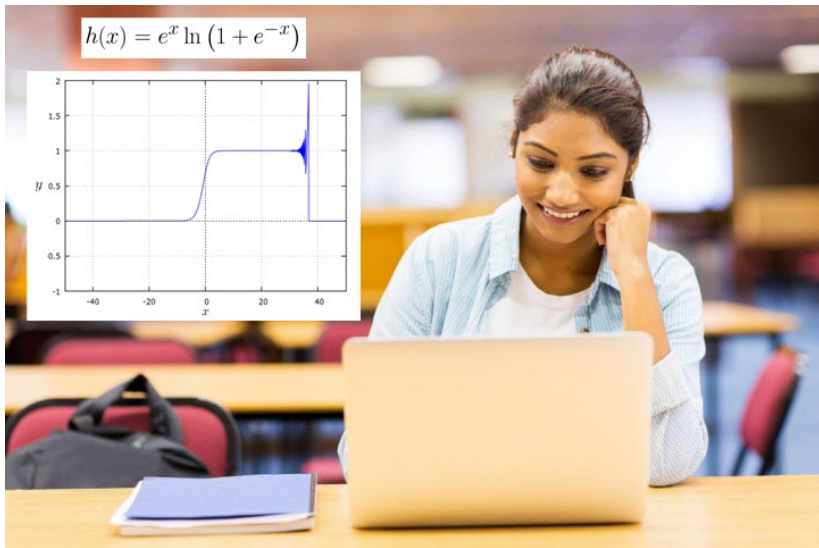
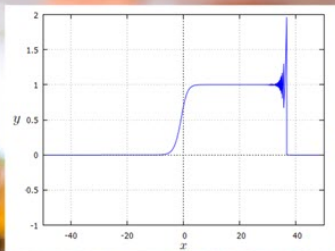
$$h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$



I. Introducción

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

$$h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$



II. Objetivos

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

II. Objetivos

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

II. Objetivos

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Objetivos:

II. Objetivos

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Objetivos:

- Identificar diversos tipos de formas indeterminadas.

II. Objetivos

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Objetivos:

- Identificar diversos tipos de formas indeterminadas.
- Presentar las reglas de L'Hospital e identificar cuándo pueden aplicarse.

II. Objetivos

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Objetivos:

- Identificar diversos tipos de formas indeterminadas.
- Presentar las reglas de L'Hospital e identificar cuándo pueden aplicarse.
- Presentar la fórmula de Taylor y aplicarla al cálculo de límites.

II. Objetivos

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Objetivos:

- Identificar diversos tipos de formas indeterminadas.
- Presentar las reglas de L'Hospital e identificar cuándo pueden aplicarse.
- Presentar la fórmula de Taylor y aplicarla al cálculo de límites.
- Reconocer la utilidad práctica del tema, así como su importancia.

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — El concepto de límite

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — El concepto de límite

Notación:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — El concepto de límite

Notación:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Definición de límite

Se dice que el número L es el *límite de la función* f en x_0 si para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el dominio de f y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — El concepto de límite

Notación:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Definición de límite

Se dice que el número L es el *límite de la función* f en x_0 si para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el dominio de f y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — El concepto de límite

Notación:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Definición de límite

Se dice que el número L es el *límite de la función* f en x_0 si para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el dominio de f y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
[0/0]	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x)$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x)$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x)$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$
$[0^0]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x)$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$
$[0^0]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x)$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$
$[0^0]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x)$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$
$[0^0]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x)$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$
$[0^0]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x)$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$
$[0^0]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Formas indeterminadas

Tipo	Ejemplo
$[0/0]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
$[\infty/\infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)}$
$[0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1/x)$
$[\infty - \infty]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\tan(x) - \frac{1}{\pi - 2x} \right)$
$[0^0]$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
$[\infty^0]$	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$
$[1^\infty]$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Primera regla

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Primera regla

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Primera regla

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Primera regla

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Primera regla

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Primera regla

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Primera regla

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Primera regla

Primera regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Segunda regla

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Segunda regla

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Segunda regla

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Segunda regla

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Segunda regla

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

(i) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$ y

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Segunda regla

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Segunda regla

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

Fundamentos teóricos — Segunda regla

Segunda regla de L'Hospital

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables en (a, b) y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si para $a < x_0 < b$

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty \text{ y}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

III. Reglas de L'Hospital

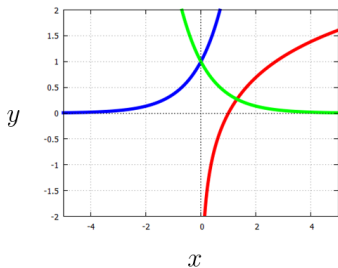
Ejemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$$

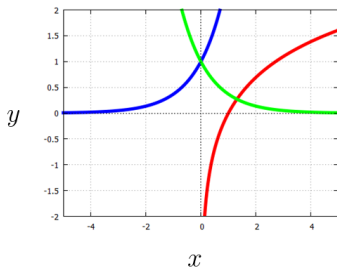


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$$

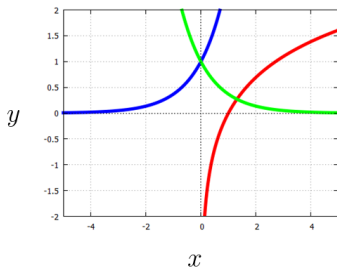


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$$

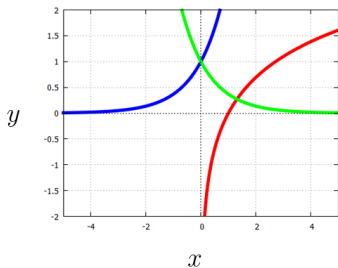


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\frac{1}{e^x}}\end{aligned}$$

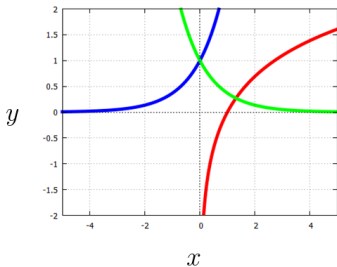


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\frac{1}{e^x}}\end{aligned}$$

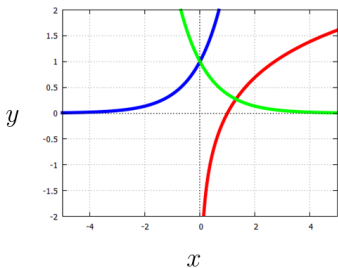


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{e^x + 1}}{-\frac{1}{e^x}}\end{aligned}$$

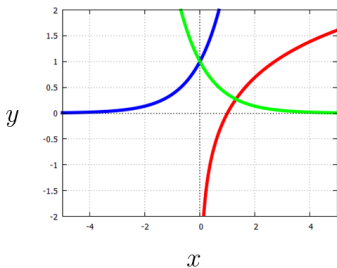


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{e^x + 1}}{-\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1}\end{aligned}$$

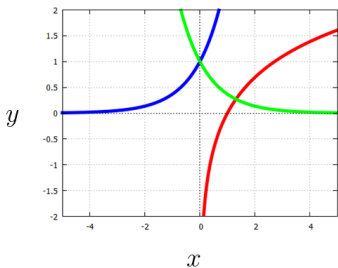


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{e^x + 1}}{-\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}}\end{aligned}$$

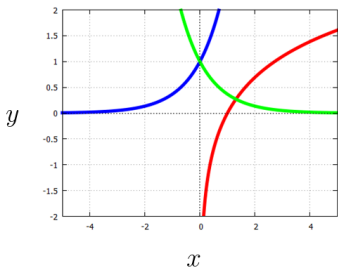


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{e^x + 1}}{-\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

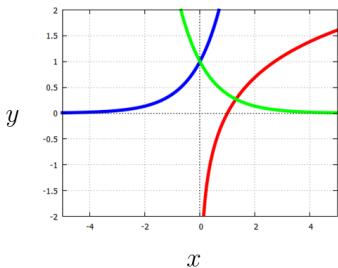


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{e^x + 1}}{-\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

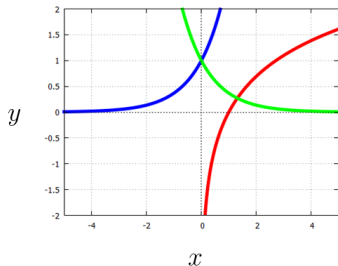


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$$

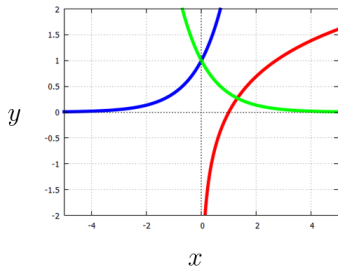


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{e^x + 1}}{-\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}}\end{aligned}$$

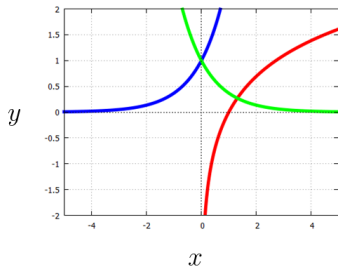


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{e^x + 1}}{-\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

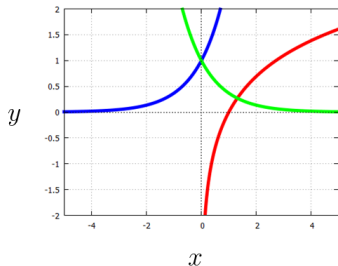


- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

III. Reglas de L'Hospital

Ejemplo 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{e^x + 1}}{-\frac{1}{e^x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} \\ &= 0.\end{aligned}$$



- e^x
- e^{-x}
- $\ln(x)$

IV. Fórmula de Taylor

Fundamentos teóricos

Teorema de Taylor

Si la derivada de orden $n + 1$ de una función f , $f^{(n+1)}(t)$, existe para toda t en un intervalo que contiene a a y x , y si

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

entonces el error $E(x) = f(x) - P_n(x)$ en la aproximación $f(x) \approx P_n(x)$ está dado por

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1},$$

donde $s \in (a, x)$.

IV. Fórmula de Taylor

Notación «O grande»

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

IV. Fórmula de Taylor

Notación «O grande»

$$\begin{aligned}f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\ &= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\end{aligned}$$

IV. Fórmula de Taylor

Notación «O grande»

$$\begin{aligned}f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\ &= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}\end{aligned}$$

IV. Fórmula de Taylor

Notación «O grande»

$$\begin{aligned}f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \\&= P_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

IV. Fórmula de Taylor

Notación «O grande»

$$\begin{aligned}f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \\&= P_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

IV. Fórmula de Taylor

Notación «O grande»

$$\begin{aligned}f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\&= P_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

Ejemplo: Si $a = 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}).$$

IV. Fórmula de Taylor

Notación «O grande»

$$\begin{aligned}f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\&= P_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

Ejemplo: Si $a = 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}).$$

Y para $n = 1$:

$$\ln(1+x) = x + O(x^2).$$

IV. Fórmula de Taylor

Notación «O grande»

$$\begin{aligned}f(x) &= P_n(x) + E_n(x) \\&= P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\&= P_n(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

Ejemplo: Si $a = 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}).$$

Y para $n = 1$:

$$\ln(1+x) = x + O(x^2).$$

IV. Fórmula de Taylor

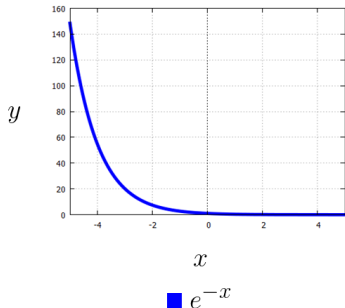
Ejemplo

Si al calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}).$$

se sustituye $t = e^{-x}$, $x \rightarrow \infty$ corresponde a $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + O(t^2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} 1 + O(t) \\ &= 1. \end{aligned}$$



V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

De

$$h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$

sabemos que:

V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

De

$$h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$

sabemos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0.$

V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

De

$$h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$

sabemos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1.$

V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

De

$$h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$

sabemos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1.$
- $h(0) = e^0 \ln(1 + e^{-0}) = \ln(2) \approx 0.7.$

V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

De

$$h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$

sabemos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$.
- $h(0) = e^0 \ln(1 + e^{-0}) = \ln(2) \approx 0.7$.
- $h(x)$ es una función creciente para toda x .

V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

De

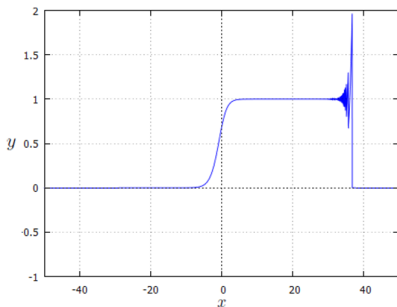
$$h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$

sabemos que:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$.
- $h(0) = e^0 \ln(1 + e^{-0}) = \ln(2) \approx 0.7$.
- $h(x)$ es una función creciente para toda x .

V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor



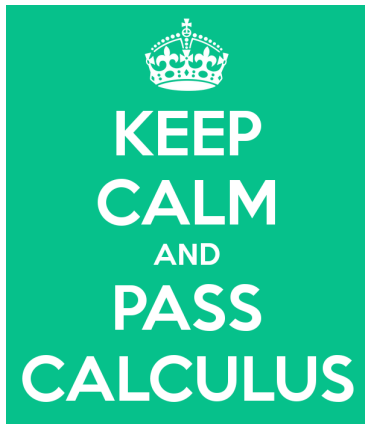
V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor



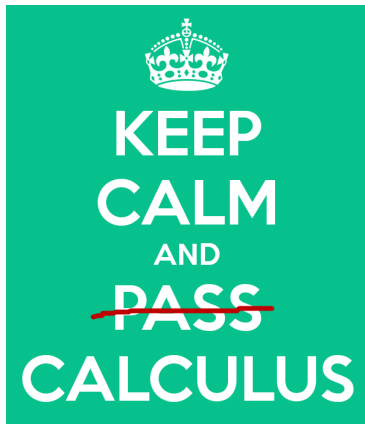
V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor



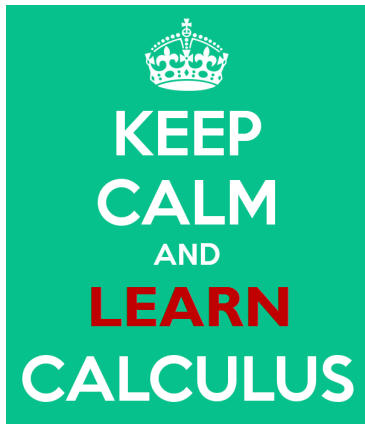
V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor



V. Aplicación

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor



VI. Conclusiones

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

- Las reglas de L'Hospital pueden emplearse sólo en indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$.

VI. Conclusiones

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

- Las reglas de L'Hospital pueden emplearse sólo en indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$ no existe, no es posible aplicar las reglas de L'Hospital.

VI. Conclusiones

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

- Las reglas de L'Hospital pueden emplearse sólo en indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$ no existe, no es posible aplicar las reglas de L'Hospital.
- La fórmula de Taylor puede emplearse para aproximar una función, pero también para evaluar límites del tipo $[0/0]$.

VI. Conclusiones

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

- Las reglas de L'Hospital pueden emplearse sólo en indeterminaciones del tipo $[0/0]$ o $[\infty/\infty]$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$ no existe, no es posible aplicar las reglas de L'Hospital.
- La fórmula de Taylor puede emplearse para aproximar una función, pero también para evaluar límites del tipo $[0/0]$.
- Los resultados obtenidos por medio de una computadora deben validarse bajo el rigor de las matemáticas.

VII. Recursos complementarios

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor



Reglas de L'Hospital: bit.ly/1XrCFT0

Fórmula de Taylor: bit.ly/1M3G5ex

VII. Recursos complementarios

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

The screenshot shows a web browser window with the URL <https://miespaciodeaprendizaje.moodlecloud.com>. The page is titled 'Mi Espacio de Aprendizaje' and is for user 'Mayra Lorena Díaz-Sosa'. The main content area is titled 'Cursos' and contains a list of courses. The course 'Cálculo Diferencial e Integral I' is highlighted with a red box and an arrow pointing to it. Other courses listed include 'Temas selectos del Derecho Público', 'Teoría Jurídica Contemporánea I', and 'Investigación y expresión jurídica'. The left sidebar contains navigation and administration options, and the right sidebar shows 'Usuarios En Línea' with 'Mayra Lorena Díaz-Sosa' listed.

<https://miespaciodeaprendizaje.moodlecloud.com>







Mayra Lorena Díaz Sosa



@malodi1982

VIII. Bibliografía

Regla de L'Hospital y fórmula de Taylor

-  Adams, R. y Essex, Ch. (2010).
Calculus, A complete course.
7a. ed. Toronto: Pearson.
-  Apostol, T. (2009).
Calculus I.
Barcelona: Reverté.
-  Haaser, N., LaSalle, J. y Sullivan, J. (1998).
Análisis matemático, Vol. I.
México: Trillas.
-  Spivak, M. (2003).
Calculus.
2a. ed. México: Reverté.

¡Gracias!